Komplekse tall

Skal innføre en ny tallmengde ved hjelp av: 2×2-matriser.

La
$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = aI_2 + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

La $\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ser at $\pi \cdot \pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2$.

(i) Binære operasjoner på C?

Addisjon i C: Vanlig addisjon av matriser

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ -b-b' & a+a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ -(b+b') & a+a' \end{bmatrix} \in C$$

Har $-+-: C\times C \longrightarrow C$, dvs. $+$ binær op. på C.

Multiplikasjon i C: Vanlig multiplikasjon av matriser.

$$\left(aI_2 + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\left(a'I_2 + b'\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (aa' - bb')I_2 + (ab' + ba')\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs.

$$(aI_2 + b\pi)(a'I_2 + b'\pi) = (aa' - bb')I_2 + (ab' + ba')\pi.$$

Har $-\cdot- : C\times C \longrightarrow C$, dvs. $\cdot$ binær op. på C.

(ii) · Addisjon av matriser er assosiativ og kommutativ

· Nøytralt element: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\cdot I_2 + 0\cdot\pi \in C$.

· Gitt $z = aI_2 + b\pi$, så er additiv invers lik
$$-z = -aI_2 - b\pi.$$

(iii) · Matrisemult. er assosiativ og har distributive lover.

- Multiplikativt nøytralt elt.: $I_2 = 1 \cdot I_2 + 0 \cdot \pi$.
- Multiplikativ invers til

$$z = aI_2 + b\pi \,, \quad \text{når } z \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dvs. } a \neq 0 \neq b.$$

er

$$\frac{1}{a^2+b^2}\left(aI_2 - b\pi\right) \qquad \underset{\text{II}}{\mathrm{adj}}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right)$$

<u>Bevis</u>: Vi har at $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$\square$

- Multiplikasjon er kommutativ:

$$(aI_2 + b\pi)(a'I_2 + b'\pi) = (aa' - bb')I_2 + (ab' + ba')\pi.$$

$$\text{II}$$

$$(a'I_2 + b'\pi)(aI_2 + b\pi) = (a'a - b'b)I_2 + (a'b + b'a)\pi$$

Dette viser at vi kan regne med mengden C som vi gjør med reelle tall. Vi kaller denne mengden <u>de komplekse tallene</u>, $\mathbb{C}$.

<u>Merk</u>: 1) De underliggende likhetene vi bruker ved multiplikasjon er:

$$I_2 \cdot I_2 = I_2 \qquad I_2 \cdot \pi = \pi$$
$$\pi \cdot \pi = -I_2 \qquad \pi \cdot I_2 = \pi.$$

2) Elementene $aI_2 + 0 \cdot \pi$ for $a \in \mathbb{R}$ "oppfører seg" som reelle tall. Vi forenkler notasjonen ved å identifisere

$$aI_2 + 0 \cdot \pi \longleftrightarrow a$$

og

$$0 \cdot I_2 + b \cdot \pi \longleftrightarrow bi$$

$$(aI_2 + b\mathbb{I})(a'I_2 + b'\mathbb{I}) = (aa'-bb')I_2 + (ab'+ba')\mathbb{I}$$

$$(a + bi)(a' + b'i) \overset{\text{def}}{=} aa'-bb' + (ab'+ba')i$$

Korrespondansen $a+bi \longleftrightarrow aI_2 + b\mathbb{I}$ "kommuterer" med addisjon og multiplikasjon.

3) Gitt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = aI_2 + b\mathbb{I} \longleftrightarrow a+bi$

Da er $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = A^T \longleftrightarrow a-bi$

kalles <u>den konjugerte av $a+bi$.</u>

Vi skriver $\overline{a+bi} = a-bi$.

<u>Vet:</u> $\underbrace{A\cdot\operatorname{adj}(A)}_{=\,AA^T} = \det(A)\, I_2 \Rightarrow (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$\sqrt{a^2+b^2}$ kalles <u>modulusen til $a+bi$</u>, og den betegnes med

$$|a+bi|,$$

dvs.

$$(a+bi)\overline{(a+bi)} = |a+bi|^2$$

Ser, vet fra før, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}A^T$, når $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathcal{C}$, dvs.

$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi) = \frac{1}{|a+bi|^2}\overline{(a+bi)}.$$

<u>Proposisjon 70</u> $z, z' \in \mathbb{C}$

(a) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(b) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
(c) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, når $z \neq 0$.
(d) $\overline{\overline{z}} = z$.

<u>Bevis:</u> Bruk at $z = a + bi \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ og regneregler for transponerte av matriser. $\square$

<u>Representasjon i planet</u>
Vi identifiserer $a + bi$ med punktet (a, b) i $\mathbb{R}^2$
Vi får da:

Addisjon i $\mathbb{C} \longleftrightarrow$ Addisjon i $\mathbb{R}^2$

Multiplikasjon i $\mathbb{C} \longleftrightarrow (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$

$\mathbb{R}^2$ med disse operasjonene kalles <u>det komplekse planet</u>.

x-aksen = den reelle aksen
y-aksen = den imaginære aksen

$$z = a + bi$$

<u>imaginærdel</u>, $b = \mathrm{Im}(z)$.

<u>realdel</u>, $a = \mathrm{Re}(z)$