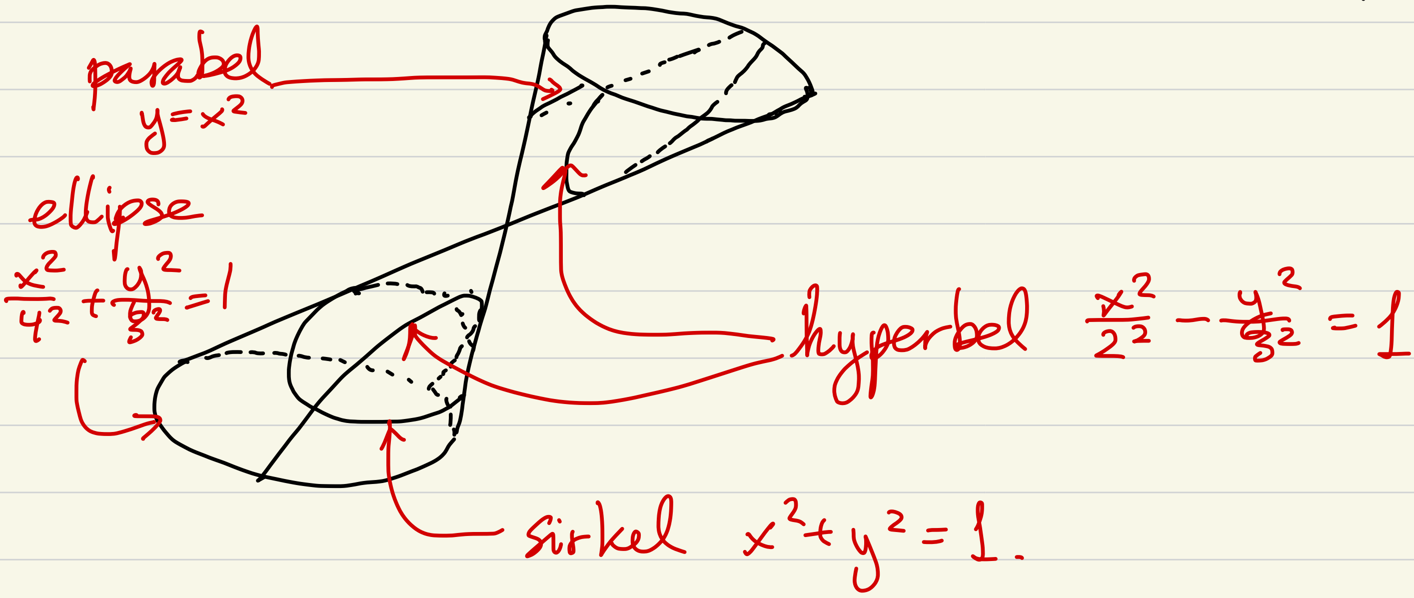
22V

Kjeglesnitt = et snitt av en kjegle med et plan



Kan vises: Ethvert kjeglesnitt kan i $\mathbb{R}^2$ uttrykkes som

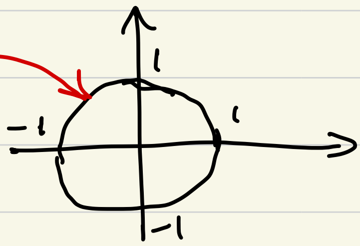
$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

hvor ikke alle a, b og c er null.

Ikke-eksempel $x^2+y^2+1=0$

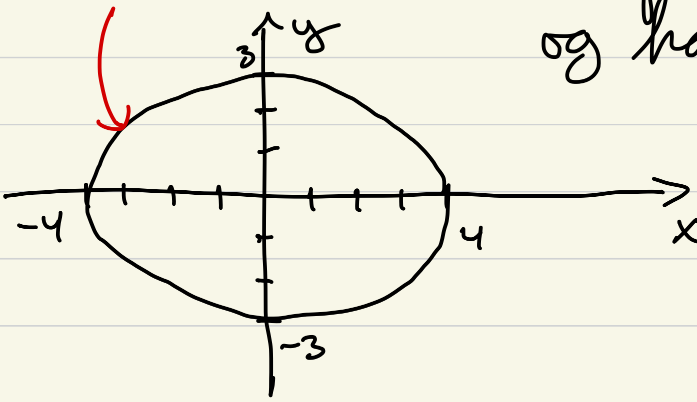
Eksempler

1) $x^2+y^2=1$

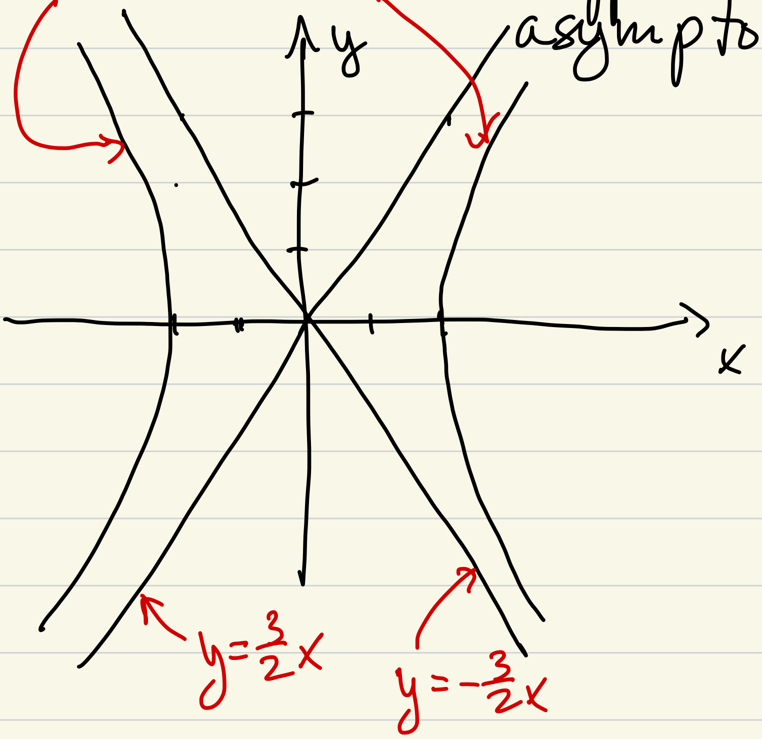


sirkel med radius 1.

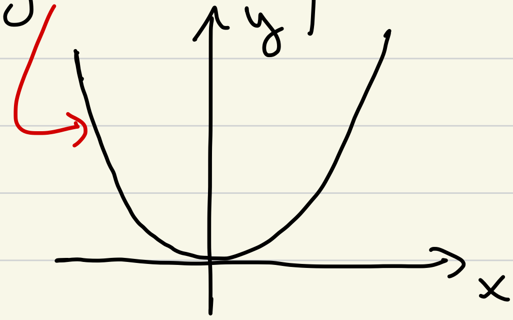
2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ – ellipse med sentrum i origo og halvakser $a=4$ og $b=3$



3) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ – hyperbel sentrert i origo og asymptoter $y = \pm \frac{3}{2}x$.



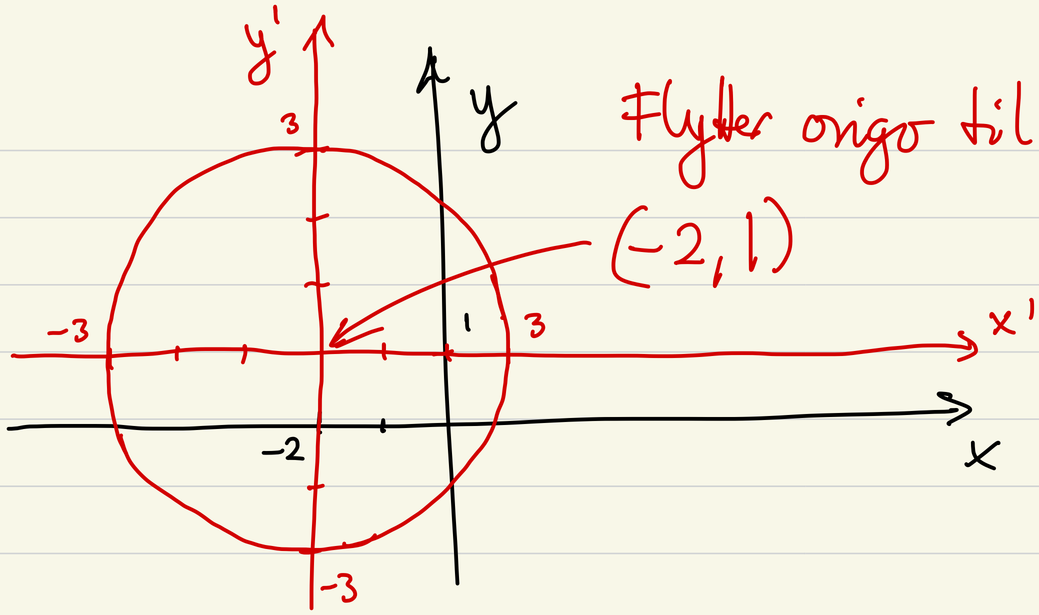
4) $y = x^2$ – parabel



__Eksempel__ $\underbrace{x^2+4x}_{\parallel} + \underbrace{y^2-2y}_{\parallel} - 4 = 0$

$$\overbrace{(x+2)^2-4} + \overbrace{(y-1)^2-1} - 4 = 0$$

$\Longrightarrow$ $(x')^2 + (y')^2 = 9$, where $x' = x+2$, $y' = y-1$.



<u>Generelt:</u>

Gitt $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f$ $(*)$

Denne kan overføres til

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + f' = 0$$

ved å flytte origo.

<u>Gjenstående problem</u>: Hvordan behandle

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

der $b \neq 0$? Skal redusere det til $(*)$ over.

Ser først på

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ og $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Da er

$$(**) \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + bxy + byx + cy^2$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2 = Q(x,y).$$

A symmetrisk $\xrightarrow{\text{Teorem 69}}$ A er ortogonalt diagonaliserbar dvs. $\exists$ ortogonal matrise P $(P^{-1} = P^T)$ slik at

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{for } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\mathbf{x}'$, der $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.
Da er

$$\mathbf{x}^T = (P\mathbf{x}')^T = (\mathbf{x}')^T P^T$$

Innsatt i (**) får vi:

$$Q(x,y) = (\mathbf{x}')^T P^T A P \mathbf{x}'$$

$$= (\mathbf{x}')^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}'$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2$$

$\Rightarrow$ Produktleddet xy er borte!
og redusert til (*), dvs. $b = 0$.