Ortogonal diagonalisering

DEF: En $n \times n$-matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis det eksisterer en ortogonal matrise P slik at

$$P^T A P = D$$

for en diagonalmatrise D.

Merk: A ortogonalt diagonaliserbar

$\Rightarrow P^T A P = D$, D diagonal, P ortogonal.

$\Rightarrow A = P D P^T$

$$\Rightarrow A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = P D P^T = A.$$

$\Rightarrow A$ symmetrisk.

Mål: Vise at motsatte implikasjon holder.

Teorem 67 For en symmetrisk matrise A gjelder:

(a) Alle egenverdiene til A er reelle.

(b) Egenvektorer fra forskjellige egenrom er ortogonale.

Bevis: (a) MA1202

(b) La $x_i \in E(\lambda_i)$ for $i = 1,2$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

ØÅV: $x_1 \cdot x_2 = 0$.

A symmetrisk

Har

$$\underbrace{Ax_1}_{} \cdot x_2 = x_1 \cdot A^T x_2 = x_1 \cdot A x_2 = x_1 \cdot \lambda_2 x_2 = \lambda_2 x_1 \cdot x_2$$

$$Ax_1 \cdot x_2 = \lambda_1 x_1 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 0,$$ dvs. x_1 og x_2 ortogonale.

$\square$

<u>Teorem 68</u> (Schurs teorem)
La A være en reell $n\times n$-matrise med n reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (med multiplisitet). Da eksisterer en ortogonal matrise P slik at

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

<u>Bevis:</u> <u>Induksjon på n</u>: <u>$n=1$</u>: $A=[a_{11}]$, velg $P=[1]$. ok.
Anta at påstanden er vist for $n-1$. Vil vise påstanden for n.
La $\mathbf{x}_1$ være en egenvektor i $E(\lambda_1)$ med lengde 1, og la $\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ være en ortonormal mengde som står ortogonalt på $\mathbf{x}_1$ (Oppgave: Vis at slike fins). La

$$P = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{x}_n]$$

Da er P en ortogonal matrise (Prop. 65).

(1) <u>Påstår</u>: $P^T A P = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

<u>Bevis:</u>
Har $\mathbf{c}_1(XY) = X\mathbf{c}_1(Y)$, X og Y to matriser.
Det gir

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(P^TAP) &= P^TA\,\mathbf{c}_1(P) \\ &= P^TA\,\mathbf{x}_1 \\ &= P^T\lambda_1\mathbf{x}_1 = \lambda_1 P^T\mathbf{x}_1 = \lambda_1 P^T\mathbf{c}_1(P) \\ &= \lambda_1\mathbf{c}_1(P^TP) \\ &= \lambda_1\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Påstanden følger fra dette.

Husk: $P^T = P^{-1}$ (*)

(2) Påstår: A_2 har egenverdier $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Bevis:

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I_n - A) &\overset{(*)}{=} \det(P^T)\det(\lambda I_n - A)\det(P) \\
&= \det(P^T(\lambda I_n - A)P) \\
&= \det(\lambda P^T P - P^T A P) \\
&= \det(\lambda I_n - P^T A P) \\
&= \det\left(\left[\begin{array}{c|c} \lambda - \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \lambda I_{n-1} - A_2 \\ 0 & \end{array}\right]\right) \\
&= (\lambda - \lambda_1)\det(\lambda I_n - A_2)
\end{aligned}
$$

Kan vise, oppgave: A_2 har egenverdier $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(3) A_2 $(n-1)\times(n-1)$-matrise med reelle egenv. $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$

Antar sant for $n-1 \Rightarrow \exists P_1$ ortogonal matrise slik at

$$
P_1^T A_2 P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & * \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}
$$

Da er

$$
\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^T \\ 0 & \end{array}\right] P^T A P \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{array}\right] \overset{(1)}{=} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^T \\ 0 & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right]}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{array}\right]
$$

$$
\|
$$

$$
\left(P\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{array}\right]\right)^T A \left(P\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{array}\right]\right)
$$

$$
= \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^T A_2 \\ 0 & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{array}\right]}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^T A_2 P_1 \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & * & \cdots & & * \\ \hline 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{array}\right]
$$

Produkt av ortogonale matriser = ortogonal matrise.
Påstanden følger. $\square$

Teorem 69 A $n \times n$-matrise. Flg. er ekvivalent:
(a) A er ortogonalt diagonaliserbar.
(b) A har en ortonormal basis av egenvektorer.
(c) A er symmetrisk.

Bevis: Har sett: (a) $\Rightarrow$ (c)
(c) $\Rightarrow$ (a): A symmetrisk $\xrightarrow{\text{Teorem 67 (a)}}$ A n reelle egenverdier.
Teorem 68 $\Rightarrow \exists P$ ortogonal matrise slik at

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

A symmetrisk $\Rightarrow (P^T A P)^T = P^T A (P^T)^T = P^T A P$
$\Rightarrow P^T A P$ symmetrisk

$$\Rightarrow P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A ortogonalt diagonaliserbar.

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Oppgave. $\square$