Ortogonale matriser (spesielle basis bytter)

DEF: En $n \times n$-matrise A sies å være <u>ortogonal</u> hvis

$$A^T = A^{-1}.$$

<u>Merk/Oppgave</u>: 1) A $n \times n$-matrise

$$A \text{ ortogonal} \iff A^T A = I_n.$$

2) A ortogonal $\Rightarrow$ A^T ortogonal.

<u>Eksempel</u>

1) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

2) La $A = [\mathbf{x}_1 \,\vdots\, \mathbf{x}_2]$ være en ortogonal 2×2-matrise

Da er $A^T = \begin{bmatrix} \text{-- } \mathbf{x}_1 \text{ --} \\ \text{-- } \mathbf{x}_2 \text{ --} \end{bmatrix}$ og

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} \text{-- } \mathbf{x}_1 \text{ --} \\ \text{-- } \mathbf{x}_2 \text{ --} \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}^{\|\mathbf{x}_1\|^2} & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \underbrace{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}_{\|\mathbf{x}_2\|^2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| = 1$, og $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er ortogonale.

DEF: La $\mathcal{O} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t\}$ være t vektorer i $\mathbb{R}^n$.

(i) Mengden $\mathcal{O}$ kalles en <u>ortogonal mengde</u> hvis $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0$ for $i \neq j$.

(ii) Mengden $\mathcal{O}$ kalles en <u>ortonormal mengde</u> hvis den er ortogonal og $\|\mathbf{x}_i\| = 1$ for $i = 1, 2, \dots, t$.

Proposisjon 65
Flg. er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A.
(a) A er ortogonal.
(b) Radvektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.
(c) Kolonnevektorene ——— " ———.

Bevis: Oppgave. $\square$

Proposisjon 66 Flg. er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A.
(a) A er ortogonal,
(b) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$,
(c) $(A\mathbf{x}) \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$.

Bevis: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ kolonnevektorer i $\mathbb{R}^n$.
Husk:
$$\underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}_{\text{skalarprodukt}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$$
matrisemultiplikasjon.

Merk: $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}^T A^T) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T (A^T \mathbf{y})$ $(*)$

(a) $\Rightarrow$ (b): Anta at A er ortogonal.
$$\|A\mathbf{x}\|^2 = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \overset{(*)}{=} \mathbf{x}^T \underbrace{A^T A}_{I_n} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$
$$\Rightarrow \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Har sett: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{4}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$
Gir
$$A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \frac{1}{4}\|A\mathbf{x} + A\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\|A(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - \frac{1}{4}\|A(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2$$
$$\overset{(b)}{=} \frac{1}{4}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}. \Rightarrow (c).$$

<u>(c) ⇒ (a):</u> Anta at $(A\mathbf{x})\cdot(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.

Har

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = A\mathbf{x}\cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot A^TA\mathbf{y}$, for alle $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{x}\cdot A^TA\mathbf{y} = 0$ —— " ——

$\Rightarrow \mathbf{x}\cdot\underbrace{(\mathbf{y} - A^TA\mathbf{y})} = 0$ —— " ——

$\quad \mathbf{x}\cdot(I_n - A^TA)\mathbf{y} = 0$

Spesielt for $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i = 1,2,\dots,n$

$\Rightarrow (I_n - A^TA)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$

Spesielt for $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$, $i = 1,2,\dots,n$

$\Rightarrow I_n - A^TA = O_{n,n}$ – nullmatrisen

$\Rightarrow A^TA = I_n \Rightarrow A$ ortogonal. $\square$