Egenverdier og egenverdier II

A $n\times n$-matrise

$\lambda \in \mathbb{R}$ egenverdi $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0.$

Hva er $c(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$? Pr. def. av determinanter, vet at $c(\lambda)$ er et polynom i λ. Hvilken grad?

Lemma 60 La $B = [b_{ij}]$ være en $n\times n$-matrise, der $b_{ij} = c_{ij}\lambda + c'_{ij}$. Da er $\det(B)$ et polynom i λ av høyst grad n.

Bevis: Bruk induksjon, oppgave. $\square$

Lemma 61 La $A = [a_{ij}]$ være en $n\times n$-matrise. Da er

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) + g(\lambda),$$

der $g(\lambda)$ er et polynom i λ av grad høyst $n-2$.

Bevis: Induksjon på n.

$n=1$: $\det(\lambda I_1 - A) = \det(\lambda - a_{11}) = \lambda - a_{11} + \overset{\text{grad } -\infty}{0}$ OK.

$n=2$: $\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix}\right) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \underbrace{- a_{21}a_{12}}_{g(\lambda).}$ OK

$n>2$: Anta vist for $n-1$.

$$\det(\lambda I_n - A) = \det\left(\left[\begin{array}{c|ccc} \lambda - a_{11} & \cdots & & \cdots \\ \hline -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & \vdots \\ -a_{31} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{array}\right]\right)$$

②

en rad uten λ

$$= (\lambda - a_{11}) \underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}\right)}_{\shortparallel} + a_{21} B_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}(-a_{n1}) B_{n1}$$

grad $\leq n-2$ v.h.a. Lemma 58

$$= (\lambda - a_{11})\Big((\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) + g_1(\lambda)\Big) + \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{grad} \leq n-2}$$

grad $\leq n-3$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) + g(\lambda)$$

grad $\leq n-2$. $\square$

Teorem 62 La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise. Da er

$$c(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + (-1)^n \det(A).$$

(dvs. et polynom av grad n).

Bevis: Følger av Lemma 61 og at
$$c(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A). \quad \square$$

Merk: 1) $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ = "trasen til A".
$-\mathrm{Tr}(A)$ er koeffisienten til λ^{n-1} i $c(\lambda)$.

2) Hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er røttene i $c(\lambda)$, så kan en vise at
$$c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$
og da er
$$c(0) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \det(A)$$

dvs. $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ = produktet av alle røttene i $c(\lambda)$.

Eksempel: $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$, $\det(A)=1$, $\mathrm{Tr}(A)=1+3=4$.

$$c(\lambda)=\det(\lambda I_2-A)=\lambda^2-4\lambda+1.$$

Har sett: $\lambda_1=2+\sqrt{3}$, $\lambda_2=2-\sqrt{3}$

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

$$\to \quad \lambda_1+\lambda_2=4=\mathrm{Tr}(A)$$

Generelt:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots$$

DEF: A $n\times n$-matrise, λ egenverdi for A.
$E(\lambda)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\}$ kalles egenrommet for egenverdi λ.

Teorem 63 A $n\times n$-matrise, $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t\}$ egenverdier for A med $\lambda_i\neq\lambda_j$ for $i\neq j$, $\mathcal{B}_i$ basis for $E(\lambda_i)$ for $i=1,2,\ldots,t$. Da er $\bigcup_{i=1}^{t}\mathcal{B}_i$ basis for $\mathrm{LinSpan}(\bigcup_{i=1}^{t}\mathcal{B}_i)$.

Bevis: Induksjon på t: $t=1$: Da er $\bigcup_{i=1}^{t}\mathcal{B}_i=\mathcal{B}_1$, som er en basis for $\mathrm{LinSpan}(\mathcal{B}_1)$.

$t>1$: Anta sant for $t-1$. Vil vise at $\bigcup_{i=1}^{t}\mathcal{B}_i$ er lin. uavh. La $\mathcal{B}_i=\{\mathbf{b}_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$. Anta at

$$\mathbf{0}=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\mathbf{b}_{ij}.\quad \text{Anvend } A$$

$$\mathbf{0} = A\mathbf{0} = A\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}\, \mathbb{b}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} A\, \mathbb{b}_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \lambda_i \mathbb{b}_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathbf{0} = A\mathbf{0} - \lambda_t \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}\lambda_i \mathbb{b}_{ij} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}\lambda_t \mathbb{b}_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}(\lambda_i - \lambda_t)\mathbb{b}_{ij} = \sum_{i=1}^{t-1}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}(\lambda_i - \lambda_t)\mathbb{b}_{ij}$$

$\bigcup_{i=1}^{t-1} \mathcal{B}_i$ lin. uavh. $\Rightarrow \alpha_{ij}\underbrace{(\lambda_i - \lambda_t)}_{\neq 0} = 0$ for $i = 1, 2, \dots, t-1$, $j = 1, 2, \dots, n_i$

$\Rightarrow \alpha_{ij} = 0$ for $i = 1, 2, \dots, t-1$ og $j = 1, 2, \dots, n_i$

$\Rightarrow \mathbf{0} = \sum_{j=1}^{n_t} \alpha_{tj}\, \mathbb{b}_{tj} \xrightarrow[\text{uavh.}]{\mathcal{B}_t \text{ lin}} \alpha_{tj} = 0,\ j = 1, 2, \dots, n_t$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}_i$ lin. uavh. $\square$.

Merk: 1) Dimensjonen til et egenrom er minst 1.

Faktum 2) $\dim E(\lambda_i) \leq$ multiplisiteten til λ_i som rot i $c(\lambda) = 0$.

Korollar 64 A $n \times n$-matrise. Hvis A har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, så er A diagonaliserbar.

Bevis: Siden $c(\lambda_i) = \det(\lambda_i I_n - A) = 0$, har

$$(\lambda_i I_n - A)\mathbb{x} = \mathbb{0}$$

minst en løsning $\neq \mathbb{0}$, dvs. en egenvektor $\mathbb{b}_i$ med egenverdi λ_i for $i=1,2,..,n$.
Teorem 63 $\Rightarrow \{\mathbb{b}_i\}_{i=1}^{n}$ er lin. uavh.
Teorem 57 $\Rightarrow$ A er diagonaliserbar. $\square$