Bytte av basis

Har sett, hvis en $n\times n$-matrise A har n lin. uavh. egenvektorer, da fins invertibel matrise P slik at

$$P^{-1}AP = D \text{ — diagonal matrise.}$$

Hvordan kan vi tenke på/tolke matrisen P?

La $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - standardbasisen for $\mathbb{R}^n$.

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ og $\mathcal{B}' = \{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \dots, \mathbf{b}_n'\}$ være to basiser for $\mathbb{R}^n$ fremstilt ved $\mathcal{S}$. For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, så er

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$$

for noen $x_i \in \mathbb{R}$. La $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$.

Spørsmål: Hvordan komme $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$ til $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}'}$?

La $P = [\mathbf{b}_1 \vdots \mathbf{b}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{b}_n]$. Da er

$$P(\mathbf{x})_{\mathcal{B}} = \mathbf{x} = (\mathbf{x})_{\mathcal{S}}$$

Dette gir at P er en overgang fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{S}$. Betegner denne med $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}$ $(=P)$.

Oppgave: P er invertibel.

Tilsvarende, $P' = [\mathbf{b}_1' \vdots \mathbf{b}_2' \vdots \cdots \vdots \mathbf{b}_n'] = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}}$ og

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x})_{\mathcal{B}'} = \mathbf{x} = (\mathbf{x})_{\mathcal{S}}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x})_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{x})_{\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}}\right)^{-1} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$$

$\Rightarrow$ Overgangsmatrisen fra koordinatvektoren for $\mathcal{B}$ til koordinatvektoren for $\mathcal{B}'$ er gitt ved

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}}\right)^{-1} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}.$$

<u>Lemma 59</u> La $\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}'$ være to basiser for $\mathbb{R}^n$.

(a) Overgangsmatrisen fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{B}'$ er gitt ved

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}}\right)^{-1} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}$$

(b) Overgangsmatrisen fra basisen $\mathcal{B}'$ til basisen $\mathcal{B}$ er gitt ved

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}\right)^{-1} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}.$$

<u>Bevis:</u> Følger av det over. $\square$.

<u>Eksempel</u>

La $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

<u>Sjekk:</u> $\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}'$ er basiser for $\mathbb{R}^3$.

Overgangsmatrise fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{B}'$?

Har $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ og $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Sjekk:</u> $\left(P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{G}}$

Har $P^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \left(P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

<u>Ser:</u> $\mathbf{b}_1 \longleftrightarrow \mathbf{b}_2'$, $P^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbf{b}_1}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbf{b}_2'}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$.

<u>Utfordring:</u> $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineær trans. Da $\exists$ en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$ og en basis $\mathcal{B}'$ for $\mathbb{R}^m$ slik at

$$m^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(T) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{n-r=\dim N(A)} \end{array}\right] \left.\vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}}\right\} m-r$$

der $A = m^{\mathcal{G}_m}_{\mathcal{G}_n}(T)$ og $r = \text{rang}(A)$.

<u>Ny tolkning av diagonalisering</u>

A $n \times n$-matrise.

Anta at A har n lineært uavh. egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

<u>Har sett:</u> $P = [\mathbf{v}_1 \vdots \mathbf{v}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n]$. Da er

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

Hva er P? $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

Da er $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n}$ og $P^{-1} = P_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{B}}$.

Har at $A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_n}(T_A)$ Dette gir

$$P^{-1}AP = P_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{B}}\, m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_n}(T_A)\, P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n} = m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T_A)$$

$$= D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$