Egenverdier og egenvektorer

A $n\times n$-matrise, A gir opphav til lin. trans. $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

→ <u>DEF:</u> Hvis $\mathbf{x}$ er en ikke-null vektor i $\mathbb{R}^n$ slik at

→ $$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

for en $\lambda \in \mathbb{R}$, så kalles $\mathbf{x}$ en <u>egenvektor for A</u> og λ <u>den tilhørende egenverdien</u>.

<u>Eksempel</u> A $n\times n$-matrise. Da er $\mathbf{x} \in N(A) \setminus \{0\}$ en egenvektor med egenverdi 0, siden

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0\cdot \mathbf{x}.$$

Hvordan finne egenverdier og egenvektorer?

$\mathbf{x}$ egenvektor $\iff A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ for en $\lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ —— " ——

$\iff (\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ —— " ——

Dette gir λ egenverdi $\iff (\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en løsn. $\neq \mathbf{0}$.

$\iff (\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ∞ mange løsn

$\iff \lambda I_n - A$ ikke invertibel

$\iff \det(\lambda I_n - A) = 0.$

Vi har vist:

<u>Proposisjon 56:</u> A $n\times n$-matrise over $\mathbb{R}$.

λ egenverdi for $A \iff \det(\lambda I_n - A) = 0.$

<u>Eksempel</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-1)(\lambda-3) - (-1)(-2)$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 3\lambda + 3 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda-2)^2 - 3 = 0$$

$$\iff (\lambda-2)^2 = 3$$

$$\iff \lambda - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \lambda_1 = 2+\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 2-\sqrt{3}.$$

<u>Innsatt i $\lambda I_2 - A$:</u>

<u>$\lambda_1 = 2+\sqrt{3}$:</u> $\left[\begin{array}{cc|c} 2+\sqrt{3}-1 & -2 & 0 \\ -1 & 2+\sqrt{3}-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{3} & -2 & 0 \\ -1 & -1+\sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 1+\sqrt{3} \end{array}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1+\sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \sim \; x = (-1+\sqrt{3})y \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Velg $y = 1$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektor med egenverdi λ_1.

<u>$\lambda_2 = 2-\sqrt{3}$:</u> $\left[\begin{array}{cc|c} 2-\sqrt{3}-1 & -2 & 0 \\ -1 & 2-\sqrt{3}-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{3} & -2 & 0 \\ -1 & -1-\sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 1-\sqrt{3} \end{array}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \sim \; x = (-1-\sqrt{3})y \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Velg $y = 1$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektor med egenverdi λ_2.

<u>Sjekk:</u> $A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} = (2+\sqrt{3})\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}_1$

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} = (2-\sqrt{3})\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

En motivasjon for egenvektorer: La $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$

→ <u>Kan vise:</u> $\mathcal{B}$ basis for $\mathbb{R}^2$. Hva er $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T_A)$?

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T_A) = \left[T(\mathbf{x}_1) \,\vdots\, T(\mathbf{x}_2) \right] = \left[\lambda_1 \mathbf{x}_1 \,\vdots\, \lambda_2 \mathbf{x}_2 \right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{diagonal-matrise!}$$

Hvilken operasjon svarer det til på A?

La $P = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2]$. Da er

$$AP = A[\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2] = [A\mathbf{x}_1 \vdots A\mathbf{x}_2] = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 \vdots \lambda_2 \mathbf{x}_2]$$

$$P^{-1} \cdot \Big| \quad AP = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{=D} \Leftarrow \text{diagonal matrise.}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = P^{-1}P \cdot D = D$$

$$\Rightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

<u>Husk</u>: $A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = PD^{100}P^{-1} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^{100} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} \end{bmatrix}P^{-1}$.

<u>DEF</u>: To $n \times n$-matrise A og B kalles <u>similære</u> hvis det eksisterer en invertibel matrise P slik at

$$B = P^{-1}AP \quad (\Leftrightarrow A = PBP^{-1}).$$

Når er en $n \times n$-matrise A similar til en diagonal matrise?

<u>DEF</u>: En $n \times n$-matrise A er <u>diagonalizerbar</u> hvis A er similar til en diagonalmatrise.

Anta at $(*)$ $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ (dvs. A diagonaliserbar)

$$\Leftrightarrow \quad AP = PD = [\lambda_1 \mathbf{c}_1(P) \vdots \lambda_2 \mathbf{c}_2(P) \vdots \cdots \vdots \lambda_n \mathbf{c}_n(P)]$$

$$AP = [A\mathbf{c}_1(P) \vdots A\mathbf{c}_2(P) \vdots \cdots \vdots A\mathbf{c}_n(P)]$$

$$\iff A\,\mathbb{c}_i(P) = \lambda_i \mathbb{c}_i(P) \quad \text{for } i=1,2,\dots,n$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{c}_1(P),\dots,\mathbb{c}_n(P)$ er egenvektorer med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ og $\{\mathbb{c}_1(P), \mathbb{c}_2(P), \dots, \mathbb{c}_n(P)\}$ er lin. uavh., siden P er invertibel.

<u>Motsatt:</u> Anta at A har n lineært uavh. egenvektorer $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_n\}$ med tilh. egenverdier $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

La $P = [\mathbb{b}_1 \vdots \mathbb{b}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbb{b}_n]$. Da er

$$AP = [A\mathbb{b}_1 \vdots A\mathbb{b}_2 \vdots \cdots \vdots A\mathbb{b}_n] = [\lambda_1 \mathbb{b}_1 \vdots \lambda_2 \mathbb{b}_2 \vdots \cdots \vdots \lambda_n \mathbb{b}_n]$$

$$= P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{=D \text{ – diagonalmatrise}} = PD$$

$\{\mathbb{b}_i\}_{i=1}^n$ lin. uavh. $\xrightarrow{\text{Teorem 17}}$ P invertibel $\Rightarrow P^{-1}AP = D$.

$\Rightarrow$ A er similær til en diagonalmatrise

Vi har vist:

<u>Teorem 57</u> La A være en $n\times n$-matrise. Flg. er ekvivalent:

(a) A er diagonaliserbar.

(b) A har n lineært uavhengige egenvektorer.

$\longrightarrow$

Teorem 58 La A og B være similære $n\times n$-matriser.
Da er
$$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - B)$$

Bevis: La $B = P^{-1}AP$ for en invertibel matrise P.
Har
$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - A) &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_n - A)\det(P)\\ &= \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P)\\ &= \det(\lambda \underbrace{P^{-1}P}_{} - P^{-1}AP)\\ &= \det(\lambda I_n - B)\end{aligned}$$
$\square$.

DEF: $c(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ er det karakteristiske polynomet til A for en $n\times n$-matrise.

Skal vise at det er et polynom av grad n.