Lineære transformasjoner

A $m \times n$-matrise over $\mathbb{R}$.
A gir opphav til en funksjon $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
ved at for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Denne vil tilfredsstille

(i) $T_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y})$

(ii) $T_A(c\mathbf{x}) = cT_A(\mathbf{x})$.

Generaliserer dette til vektorrom:

<u>DEF</u>: En <u>lineærtransformasjon</u> $T : V \longrightarrow W$ mellom to vektorrom V og W over $\mathbb{R}$ er en funksjon

$$T : V \longrightarrow W$$

slik at

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ \text{(ii)} & T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) \end{array}\right\} \text{Bevarer struktur.}$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og $c \in \mathbb{R}$

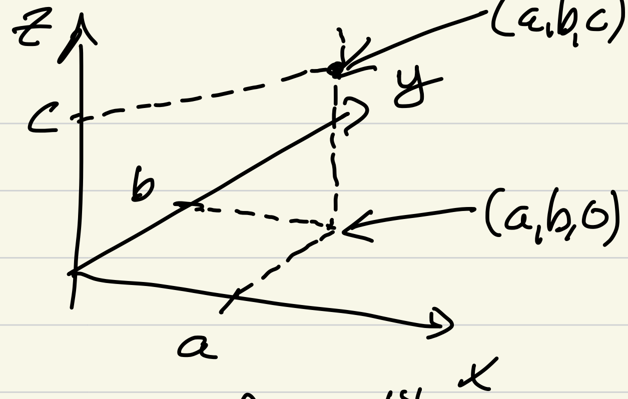
<u>Merk</u>: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (velg $c=0$ i (ii))

<u>Eksempler</u>

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

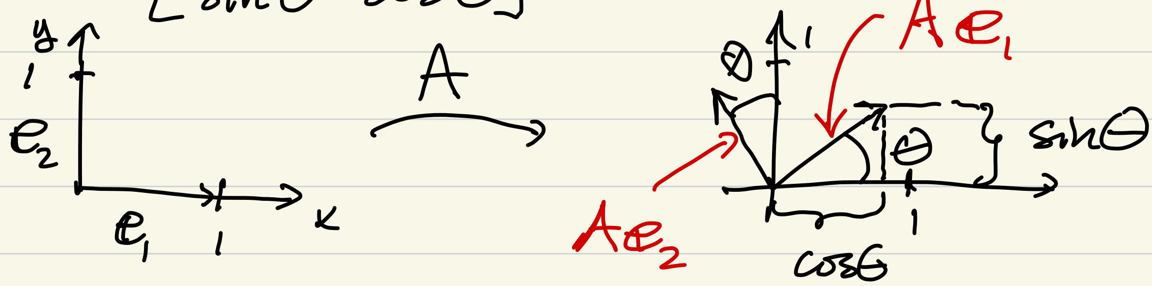
②

$$A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$



$A =$ "projeksjonen ned i xy-planet".

2) $A = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



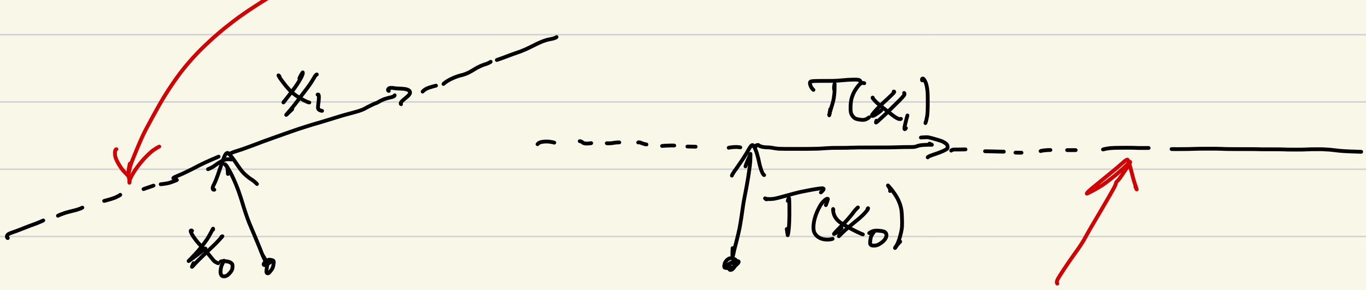
$A =$ "rotasjon med vinkelen θ".

<u>Merk:</u> $T : V \longrightarrow W$ lineær transformasjon.

<u>1) T sender "linjer til linjer":</u>

En linje L er gitt som

$$L = \{ x_0 + t x_1 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (x_1 \neq 0).$$



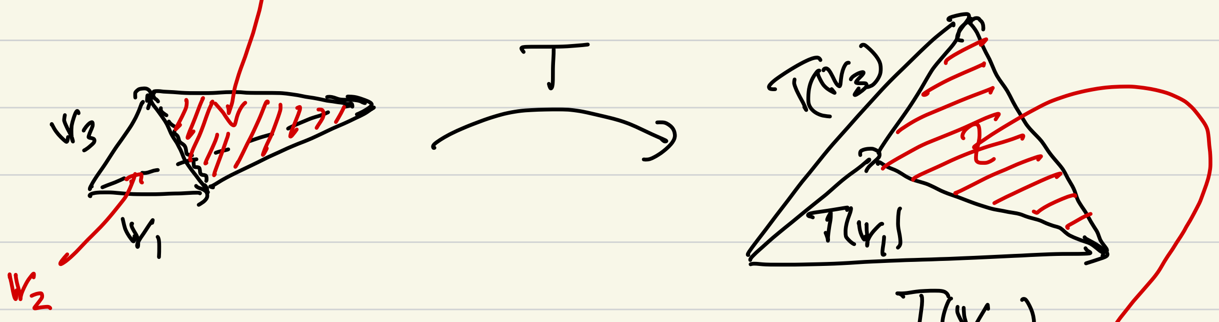
$$T(L) = \{T(x_0) + tT(x_1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

I tillegg: Parallelle linjer $\xrightarrow{T}$ Parallelle linjer

<u>2) T sender triangler til triangler:</u>

Et triangel Δ er gitt ved

$$\Delta = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,\ \alpha_i \geq 0\}.$$



$$T(\Delta) = \{\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,\ \alpha_i \geq 0\}$$

<u>Proposisjon 5.3</u> Alle lineærtransformasjoner $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er gitt ved en $m \times n$-matrise A og $T(u) = A \cdot u$.

<u>Bevis</u>: La $\mathcal{S}_t = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ være standard basisen for $\mathbb{R}^n$. Siden $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tilfredsstiller (i) og (ii), så vil

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$$

sendes til

$$\begin{aligned} T(u) &= T(u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n) \\ &\overset{(i)}{=} T(u_1 e_1) + T(u_2 e_2) + \dots + T(u_n e_n) \\ &\overset{(ii)}{=} u_1 \underbrace{T(e_1)} + u_2 \underbrace{T(e_2)} + \dots + u_n \underbrace{T(e_n)} \end{aligned}$$

Kolonnevektor i $\mathbb{R}^m$ uttrykt v.h.a $\mathcal{S}_m$

$$= \underbrace{\left[T(e_1) \,\vdots\, T(e_2) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, T(e_n) \right]}_{A \;\; m \times n\text{-matrise}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = A u$$

standardmatrisen til T, betegnes med
$$A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_m}(T)$$ $\square$.

Eksempel

Definer $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ved at $T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Hva er standardmatrisen A til T?

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; T(e_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Merk: 1) Hvis $u \neq v$ i $\mathbb{R}^3$, da er $T(u) \neq T(v)$.

2) Hvis $w \in \mathbb{R}^3$, så fins $u \in \mathbb{R}^3$ slik at $T(u) = w$.

DEF: La $T : V \to W$ være en lineær transformasjon.

(i) T er en-til-en (1-1, one-to-one) (injektiv) hvis for alle $u \neq v$ i V, så er $T(u) \neq T(v)$ i W.

(ii) T er på (på, surjektiv, onto) hvis for alle $w \in W$, så $\exists\, v \in V$ slik at
$$T(v) = w.$$

(iii) T er en <u>isomorfi</u> hvis T er 1-1 og på.

(iv) Mengden $\operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\} \subseteq W$ kalles <u>bildet til T</u>.

(v) Mengden $\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ kalles <u>kjernen til T</u>.