Husk: A $m \times n$ – matrise med redusert trappeform $Red(A)$. Da er (Lemma 46)

(a) $R(A) = R(Red(A))$
(b) $\dim R(A) = \dim R(Red(A)) = \#$ ledende ukjente
(c) $\dim R(A) + \dim N(A) = n$.

I tillegg (Lemma 47), E invertibel matrise

$$\dim C(A) = \dim C(EA)$$

Spesielt, $\dim C(A) = \dim C(Red(A))$.

Merk: $C(A) \neq C(EA)$ generelt.
Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$C(A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \neq C(EA) = \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teorem 49 La A være en $m \times n$-matrise. Da er

$$\dim R(A) = \dim C(A).$$

Bevis: Fra Lemma 47 har vi at

$$\begin{aligned} \dim C(A) &= \dim C(Red(A)) \\ &= \# \text{ ledende enere} \\ &= \dim R(Red(A)) = \dim R(A). \end{aligned}$$ ☐

DEF: Rangen til en matrise A er

$$\operatorname{rang}(A) = \dim R(A) \; (= \dim C(A)).$$

Merk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 2×3-matrise

Vet: $\dim R(A) \leq 2$, $\dim C(A) \leq 3$

men har $\dim R(A) = \dim C(A)$

Generelt: A $m \times n$-matrise

$$\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}, \text{ siden } \dim R(A) \leq m, \ \dim C(A) \leq n.$$

Teorem 50 (Nullitet + rang)

La A være en $m \times n$-matrise. Da er

$$\dim N(A) + \operatorname{rang}(A) = n$$

Bevis: Lemma 46: $\dim N(A) + \underbrace{\dim R(A)}_{= \operatorname{rang}(A)} = n$ $\square$.

Mer gjelder? $N(A) + R(A) = \mathbb{R}^n$?

Eksempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Har sett: $R(A) = \operatorname{LinSpan}\{\underbrace{(1,0,1)}_{= u_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{= u_2}\}$

$N(A) = \operatorname{LinSpan}\{\underbrace{(2/3, -1/3, 1)}_{= v}\}$

Anta at $a_1 v + a_2 u_1 + a_3 u_2 = 0 \quad | \cdot v$

$$a_1 v \cdot v + a_2 \underbrace{u_1 \cdot v}_{= 0} + a_3 \underbrace{u_2 \cdot v}_{= 0} = 0 \cdot v = 0$$

$$a_1 v \cdot v = a_1 \underbrace{\|v\|^2}_{\neq 0} = 0 \implies a_1 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad a_2 u_1 + a_3 u_2 = 0 \xrightarrow[\text{lin. uavh.}]{\{u_1, u_2\}} a_2 = a_3 = 0.$$

$\Rightarrow \{v, u_1, u_2\}$ lin. uavh.

Kan $W = \text{LinSpan}\underbrace{\{v, u_1, u_2\}}_{\text{basis for } W \Rightarrow \dim W = 3} \subsetneq \mathbb{R}^3$?

$W \subseteq \mathbb{R}^3$ og $\dim W = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

Har sett $\Rightarrow$ $W = \mathbb{R}^3$ og $\{v, u_1, u_2\}$ basis for $\mathbb{R}^3$

Spesielt, for alle x i $\mathbb{R}^3$, så kan x skrives entydig som

$$x = \underset{\underset{N(A)}{\cap}}{x_{null}} + \underset{\underset{R(A)}{\cap}}{x_{rad}}$$

<u>Teorem 5.1</u> La A være en $m \times n$-matrise. Da kan alle x i $\mathbb{R}^n$ skrives entydig som

$$x = x_{null} + x_{rad}$$

der $x_{null} \in N(A)$ og $x_{rad} \in R(A)$.

<u>Bevis:</u> La $\mathcal{B}(N(A)) = \{v_i\}_{i=1}^{s}$ - basis for $N(A)$

$\mathcal{B}(R(A)) = \{u_i\}_{i=1}^{t}$ - basis for $R(A)$.

La

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s$$

og

$$u = c_1 u_1 + \cdots + c_t u_t .$$

Anta at $v + u = 0$. <u>ØÅV</u>: $b_1 = \cdots = b_s = c_1 = \cdots = c_t = 0$.

Har at $u_i \cdot v = 0$ for $i = 1, 2, \dots, t$. $(u_i \in R(A))$.
Da er

$$0 = 0 \cdot v = (v + u) \cdot v = v \cdot v + \underbrace{u \cdot v}_{=0} = \|v\|^2$$

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow b_1 = \dots = b_s = 0$, siden $\{v_i\}$ er basis

$\Rightarrow v + u = u = 0$.

Tilsvarende, så er $c_1 = \dots = c_t = 0$

$\Rightarrow B(N(A)) \cup B(R(A))$ n lin. uavh. vektorer

$\Rightarrow \text{LinSpan}(B(N(A)) \cup B(R(A))) = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Alle x i $\mathbb{R}^n$ kan skrives entydig som

$$x = x_{null} + x_{rad}$$

med $x_{null} \in N(A)$ og $x_{rad} \in R(A)$, siden $B(N(A)) \cup B(R(A))$ er en basis. $\square$

<u>Merk:</u> La A være en $m \times n$-matrise, og la $\text{rang}(A) = r$. Da er

$$\dim N(A) = n - r.$$

Siden

$$\begin{array}{ccccc} \text{rang}(A) = \dim R(A) & = & \dim C(A) & & \\ & & \| & & \| \\ & & \dim C(A^T) & = & \dim R(A^T) = \text{rang}\, A^T, \end{array}$$

så er

$$\dim N(A^T) = m - r = m - \text{rang}(A).$$