15V - hjelperesultat.

<u>Proposisjon 48</u>
La V være et endelig dimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$, og la $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} \subseteq V$

(a) En mengde $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\} \subseteq V$ er en basis for V hvis og bare hvis $\mathcal{B}$ er en lineært uavhengig mengde med maksimalt antall vektorer.

(b) Hvis $t > n$, så er $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ lineært avhengig.

(c) Hvis $t < n$, så er
$$\operatorname{Lin\,Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} \subsetneq V.$$

(d) Hvis $W \subseteq V$ er et underrom, så er
$$\dim W \leq \dim V,$$
og
$$\dim W = \dim V \iff W = V.$$

<u>Bevis:</u> <u>(a)</u>: Anta at $\mathcal{B}$ er en basis for V. La $u \in V$ med $u \neq 0$. Siden $\mathcal{B}$ er en basis og $u \neq 0$, så fins $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ hvor ikke alle $a_i = 0$ med
$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$
$$\Rightarrow \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + (-1)u = 0.$$
$$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\} \text{ er lin. avh.}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ har maksimalt antall vektorer.

Motsatt, anta at $\mathcal{B}$ er lin. uavh. med et maksimalt antall vektorer. La $u \in V$ være vilkårlig. Pr. antakelse så må $\mathcal{B} \cup \{u\}$ være lin. avhengig, dvs.

$$(*) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_t v_t + a_{t+1} u = 0$$

hvor ikke alle $a_i = 0$. Hvis $a_{t+1} = 0$, så er alle $a_i = 0$ for $i = 1, 2, .., t$ siden $\mathcal{B}$ er lin. uavh. Dette er en selvmotsigelse, slik at $a_{t+1} \neq 0$. Multipliser $(*)$ med a_{t+1}^{-1} og vi får

$$u = a_1' v_1 + a_2' v_2 + \cdots + a_t' v_t$$

for noen $a_i' \in \mathbb{R}$. Dette gir at $\mathrm{LinSpan}(\mathcal{B}) = V$ og $\mathcal{B}$ er en basis for V.

(b) La $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ være en basis for V. Da fins $a_{si} \in \mathbb{R}$ slik at

$$u_i = \sum_{s=1}^{n} a_{si} v_s$$

for alle $i = 1, 2, .., t$. Anta at

$$(*) \quad b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_t u_t = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n} b_1 a_{s1} v_s + \sum_{s=1}^{n} b_2 a_{s2} v_s + \cdots + \sum_{s=1}^{n} b_t a_{st} v_s = 0$$

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{t} b_j a_{1j}\right)}_{=0} v_1 + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{t} b_j a_{2j}\right)}_{=0} v_2 + \cdots + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{t} b_j a_{nj}\right)}_{=0} v_n = 0$$

siden $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ lin. uavh.

$$
\begin{aligned}
a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1t}b_t &= 0\\
a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2t}b_t &= 0\\
&\vdots\\
a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nt}b_t &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nt}\end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_t\end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}}_{O}
$$

$(\Delta)\quad A \cdot X = O.$

Vet $t > n \Rightarrow$ minst $t-n$ frie ukjente
$\Rightarrow (\Delta)$ har løsninger forskjellig fra O.
$\Rightarrow (*)$ —— " —— $b_1 = \cdots = b_t = 0$.
$\Rightarrow \{u_i\}_{i=1}^{t}$ lin. avh.

(c) Anta at $t < n$. La $W = \text{LinSpan}\{u_1, u_2, \dots, u_t\} \subseteq V$. Av Lemma 45 har vi at $\dim W \le t$. Hvis $W = V$, så er $\dim W = \dim V = n$, og vi får at $t \ge n$. Dette er en selvmotsigelse, slik at vi må ha at $W \subsetneq V$.

(d) La $S = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ være en lineært uavhengig mengde av vektorer i W. Siden $W \subseteq V$, så er S også en lineært uavhengig mengde vektorer i V. Dette gir at $\dim W \le \dim V$, siden dimensjonen til V er det maksimale antall lin. uavh. vektorer i V.

Hvis $W = V$, så er $\dim W = \dim V$. Hvis $\dim W = \dim V$, så er en basis for W en maksimal lin. uavhengig mengde i V, dvs. en basis for V. Det gir at $W = V$. $\square$