Gruppearbeid 4F

Skalarprodukt

Oppgave 1. La $\mathbb{u} = (1, 1, -2, 2)$, $\mathbb{v} = (2, 1, 3, -1)$ og $\mathbb{w} = (0, 2, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^4$.

(a) Regn ut $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$ og $\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|}$.
(b) Regn ut $\mathbb{u} \cdot \mathbb{w}$ og $\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{w}\|}$.
(c) Regn ut $\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}$ og $\frac{\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}\|\|\mathbb{w}\|}$.
(d) De siste tallene du regnet ut i (a)–(c), hva tyder de på?

Fasit: (a) Vi har at

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 2 + 1 - 6 - 2 = -5,$$

og

$$\frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|} = \frac{-5}{\sqrt{1+1+4+4}\sqrt{4+1+9+1}} = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{15}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

(b) Vi har at

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{w} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 - 2 = 0,$$

og

$$\frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{w}\|} = \frac{0}{\sqrt{1+1+4+4}\sqrt{0+4+1+0}} = 0.$$

(c) Vi har at

$$\mathbb{v} \cdot \mathbb{w} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2 + 3 = 5,$$

og

$$\frac{\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{w}\|} = \frac{5}{\sqrt{4+1+9+1}\sqrt{0+4+1+0}} = \frac{5}{\sqrt{15}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(d) Vi ser at $-1 \leq \frac{\mathbb{x}\cdot\mathbb{y}}{\|\mathbb{x}\|\|\mathbb{y}\|} \leq 1$ for alle valg av $\mathbb{x}$ og $\mathbb{y}$ fra $\{\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}\}$ med $\mathbb{x} \neq \mathbb{y}$.

Oppgave 2. La $\mathbb{u} = (1, 1, -2, 2)$, $\mathbb{v} = (2, 1, 3, -1)$ og $\mathbb{w} = (0, 2, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^4$.

(a) Bruk eventuelt (a), (b) og (c) i Proposisjon 4 under til å vise at hvis $\mathbb{x}_1$ og $\mathbb{x}_2$ i $\mathbb{R}^4$ er slik at

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 = \mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_2 = 4,$$

så er

$$\mathbb{u} \cdot (\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2) = 0.$$

(b) Hvis $\mathbb{x}_1$ i $\mathbb{R}^4$ er slik at $\mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 = 4$, så er også $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{x}_1 + \mathbb{w}) = 4$.

(c) **Utfordring:** La

$$\mathcal{N} = \{\mathbb{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbb{u} \cdot \mathbb{x} = 0\}.$$

Vis at $\mathbb{u} \cdot (4,0,0,0) = 4$, og la $\mathbb{x}_0 = (4,0,0,0)$. Kan du bruke mengden $\mathcal{N}$ og vektoren $\mathbb{x}_0$ til å beskrive mengden

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbb{u} \cdot \mathbb{x} = 4\}?$$

(d) **Utfordring og undring:** Hva er

$$(\mathbb{v} - \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u}) \cdot \mathbb{u}?$$

Avhenger det av hva $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er, så lenge $\mathbb{u} \neq \mathbb{O}$?

Fasit: (a) Anta at $\mathbb{x}_1$ og $\mathbb{x}_2$ i $\mathbb{R}^4$ er slik at

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 = \mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_2 = 4.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\mathbb{u} \cdot (\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2) &= \mathbb{u} \cdot (\mathbb{x}_1 + (-1)\mathbb{x}_2) \\
&= \mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 + \mathbb{u} \cdot (-1)\mathbb{x}_2 \\
&= \mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 + (-1)\mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_2 \\
&= 4 + (-1)4 = 0
\end{aligned}$$

(b) Anta at $\mathbb{x}_1$ i $\mathbb{R}^4$ er slik at $\mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 = 4$. Da er

$$\begin{aligned}
\mathbb{u} \cdot (\mathbb{x}_1 + \mathbb{w}) &= \mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_1 + \mathbb{u} \cdot \mathbb{w} \\
&= 4 + 0 = 4.
\end{aligned}$$

(c) Vi har at $\mathbb{u} \cdot (4,0,0,0) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 4$.
La $\mathbb{y} = \mathbb{x}_0 + \mathbb{w}$ for en $\mathbb{w}$ i $\mathcal{N}$. Da er

$$\begin{aligned}
\mathbb{u} \cdot \mathbb{y} &= \mathbb{u} \cdot (\mathbb{x}_0 + \mathbb{w}) \\
&= \mathbb{u} \cdot \mathbb{x}_0 + \mathbb{u} \cdot \mathbb{w} \\
&= 4 + 0 = 4
\end{aligned}$$

Dette viser at $\mathbb{y} \in \mathcal{L}$, og dette merfører at

$$\mathbb{x}_0 + \mathcal{N} = \{\mathbb{x}_0 + \mathbb{w} \mid \mathbb{w} \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{L}.$$

Motsatt, la $\mathbb{x}$ være i $\mathcal{L}$. Da har vi sett at

$$\mathbb{u} \cdot (\mathbb{x} - \mathbb{x}_0) = 0.$$

Dette gir at $\mathbb{x} - \mathbb{x}_0$ er et element i $\mathcal{N}$, dvs. $\mathbb{x} - \mathbb{x}_0 = \mathbb{w}$ for $\mathbb{w} \in \mathcal{N}$. Spesielt er

$$\mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + \mathbb{w}.$$

Det følger av dette at

$$\mathcal{L} \subseteq \mathbb{x}_0 + \mathcal{N}$$

og at

$$\mathcal{L} = \mathbb{x}_0 + \mathcal{N}.$$

(d) Vi har at

$$\begin{aligned}(\mathbb{v} - \frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u})\cdot\mathbb{u} &= \mathbb{v}\cdot\mathbb{u} - \frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u}\cdot\mathbb{u}\\ &= \mathbb{v}\cdot\mathbb{u} - \frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|^2}\|\mathbb{u}\|^2\\ &= \mathbb{v}\cdot\mathbb{u} - \mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0\end{aligned}$$

Vi ser at vi bruker ikke de spesielle verdiene av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$, slik at dette er uavhengig av de spesielle verdiene så lenge $\mathbb{u} \neq \mathbb{O}$.

Oppgave 3. Bevis minst et av utsagnene for vektorer i $\mathbb{R}^n$ i Proposisjon 4.

Proposisjon 4. *For vektorer $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ i $\mathbb{R}^n$ og la $a \in \mathbb{R}$ har vi:*
(a) $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = \mathbb{v}\cdot\mathbb{u}$.
(b) $\mathbb{u}\cdot(\mathbb{v}+\mathbb{w}) = \mathbb{u}\cdot\mathbb{v} + \mathbb{u}\cdot\mathbb{w}$.
(c) $a(\mathbb{u}\mathbb{v}) = (a\mathbb{u})\mathbb{v} = \mathbb{u}\cdot(a\mathbb{v})$.
(d) $\mathbb{u}\cdot\mathbb{u} \geq 0$ *og* $\mathbb{u}\cdot\mathbb{u} = 0$, *dvs.* $\|\mathbb{u}\| = 0$, *hvis og bare hvis* $\mathbb{u} = \mathbb{O}$.

Fasit: (d) For $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$, vi har at

$$||\mathbb{u}||^2 = \mathbb{u}\cdot\mathbb{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2.$$

Siden $u_i^2 \geq 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$, så følger det at

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0.$$

Anta at $||\mathbb{u}|| = 0$. Spesielt er $||\mathbb{u}||^2 = 0$, som er ekvivalent med at

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 0.$$

Vi har at $0 \leq u_i^2 \leq u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Dette gir at $u_i^2 = 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$, som er ekvivalent med at $u_i = 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Dette impliserer at $\mathbb{u} = \mathbb{O}$.

Motsatt, anta at $\mathbb{u} = \mathbb{O}$. Da er

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{u} = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 0.$$

Dette viser påstanden.

Vinkel mellom vektorer

Vi trenger følgende faktum om andre gradspolynomer.

Lemma. *La*

$$f(x) = Ax^2 + 2Bx + C,$$

hvor A, B og C er reelle tall med $A > 0$. Da har $f(x) = 0$ to reelle røtter hvis og bare hvis $B^2 - AC > 0$.

Proof. Vi har at

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax^2 + 2Bx + C \\ &= A(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{C}{A}) \\ &= A[(x + \frac{B}{A})^2 - \frac{B^2}{A^2} + \frac{AC}{A^2}] \\ & A[(x + \frac{B}{A})^2 - \frac{1}{A^2}(B^2 + AC)] \end{aligned}$$

Siden $A \neq 0$, så er $f(x) = 0$ hvis og bare hvis

$$(x + \frac{B}{A})^2 = \frac{1}{A^2}(B^2 - AC).$$

For alle reelle tall x så er venstresiden over et ikke-negativt reelt tall, slik at hvis det finnes en rot i $f(x) = 0$, så må $B^2 - AC \geq 0$. Motsatt, hvis $B^2 - AC \geq 0$, så har vi minst en rot. Så vi har vist at $f(x) = 0$ har minst en reell rot hvis og bare hvis $B^2 - AC \geq 0$. Hvis $B^2 - AC \geq 0$, så er røttene gitt ved $-\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC}$. Vi ser at det er to røtter hvis og bare hvis $B^2 - AC > 0$. □

Definisjon. Vinkelen θ mellom to ikke-null vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|}),$$

der θ velges mellom 0 og π.

Dvs. hvis vinkelen mellom to ikke-null vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er $\frac{\pi}{2}$, så er $\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|}$ hvis og bare hvis $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$.

Definisjon. (i) Nullvektoren er *ortogonal* på alle vektorer.
(ii) To vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er *ortogonale* hvis $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$.

Oppgave 4. La $\mathbb{u} = (1, 1, -2, 2)$, $\mathbb{v} = (2, 1, 3, -1)$ og $\mathbb{w} = (0, 2, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^4$.
(a) Hva er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.
(b) Hva er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{w}$.
(c) Hva er vinkelen mellom $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$.

Fasit: (a) Vi har at

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|} &= \frac{2 + 1 - 6 - 2}{\sqrt{1 + 2 + 4 + 4}\sqrt{4 + 1 + 9 + 1}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{15}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Vi har at $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{6}}) \approx 114.1$ grader, som er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

(b) Vi har at

$$\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{w}\|}=0$$

fra Oppgave 1 b) første del. Vi har at $\arccos(0)=\pi/2=90$ grader, som er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{w}$.

(c) Vi har at

$$\frac{\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}\|\|\mathbb{w}\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

fra Oppgave 1 c) første del. Vi har at $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})\approx 54.74$ grader, som er vinkelen mellom $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$.

Utfordring: Oppgave 5. La $\mathbb{u}=(1,1,-2,2)$, $\mathbb{v}=(2,1,3,-1)$ og $\mathbb{w}=(0,2,1,0)$ i $\mathbb{R}^4$.

La

$$\mathbb{v}'=\mathbb{v}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u}$$

og

$$\mathbb{w}'=\mathbb{w}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u}-\frac{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}'\|^2}\mathbb{v}'.$$

Hva er skalarproduktene mellom vektorene $\{\mathbb{u},\mathbb{v}',\mathbb{w}'\}$?

Fasit: Vi har fra Oppgave 2 d) at $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}'=0$. Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbb{w}'\cdot\mathbb{u}&=(\mathbb{w}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u}-\frac{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}'\|^2}\mathbb{v}')\cdot\mathbb{u}\\&=\mathbb{w}\cdot\mathbb{u}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|^2}\underbrace{\mathbb{u}\cdot\mathbb{u}}_{=\|\mathbb{u}\|^2}-\frac{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}'\|^2}\underbrace{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{u}}_{=0}\\&=\mathbb{w}\cdot\mathbb{u}-\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}=0\end{aligned}$$

Det siste skalarproduktet

$$\begin{aligned}\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}'&=\mathbb{v}'\cdot(\mathbb{w}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|^2}\mathbb{u}-\frac{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}'\|^2}\mathbb{v}')\\&=\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{u}\|^2}\underbrace{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{u}}_{=0}-\frac{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}'\|^2}\underbrace{\mathbb{v}'\cdot\mathbb{v}'}_{=\|\mathbb{v}'\|^2}\\&=\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}-\mathbb{v}'\cdot\mathbb{w}=0\end{aligned}$$

Proposisjon 6 (Trekantulikheten)**.** For $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^n$, så er

$$\|\mathbb{u}+\mathbb{v}\|\le\|\mathbb{u}\|+\|\mathbb{v}\|.$$

Utfordring: Oppgave 6. Bevis Proposisjon 6. Hint regn ut

$$(\mathbb{u}+\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}+\mathbb{v})$$

og bruk Teorem 5.

Fasit: Vi har at

$$\begin{aligned}(\mathbb{u}+\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}+\mathbb{v}) &= \mathbb{u}\cdot\mathbb{u}+\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}+\mathbb{v}\cdot\mathbb{u}+\mathbb{v}\cdot\mathbb{v}\\ &= ||\mathbb{u}||^2+2\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}+||\mathbb{v}||^2\\ &\leq ||\mathbb{u}||^2+2||\mathbb{u}||||\mathbb{v}||+||\mathbb{v}||^2\end{aligned}$$

ved å bruke Schwarz ulikhet

$$= (||\mathbb{u}||+||\mathbb{v}||)^2$$

Siden $||\mathbb{u}+\mathbb{v}||^2=(\mathbb{u}+\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}+\mathbb{v})$, så følger det at

$$||\mathbb{u}+\mathbb{v}|| \leq ||\mathbb{u}||+||\mathbb{v}||,$$

siden alle tallene over er positive tall.