Gruppearbeid 3F

Oppgave 1. La $\mathbb{u} = (1, 1, -2)$ og $\mathbb{v} = (2, 1, 3)$.

(a) Regn ut $2\mathbb{u}$.
(b) Regn ut $\mathbb{u} + \mathbb{v}$.
(c) Regn ut $2\mathbb{u} - \mathbb{v}$.
(d) Beskriv mengden av alle punkter i $\mathbb{R}^3$ som er gitt ved

$$\{(x, y, z) = a\mathbb{u} + b\mathbb{v} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Er det en sirkel, en parabel, en hyperbel, et plan, en kuleoverflate, ...?

(e) Finnes det $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$a\mathbb{u} + b\mathbb{v} = (4, 3, -1)?$$

Fasit: (a) Vi har at

$$\begin{aligned} 2\mathbb{u} &= 2(1, 1, -2) \\ &= (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot (-2)) \\ &= (2, 2, -4) \end{aligned}$$

(b) Vi har at

$$\begin{aligned} \mathbb{u} + \mathbb{v} &= (1, 1, -2) + (2, 1, 3) \\ &= (1 + 2, 1 + 1, -2 + 3) \\ &= (3, 2, 1) \end{aligned}$$

(c) Vi har at

$$\begin{aligned} 2\mathbb{u} - \mathbb{v} &= 2(1, 1, -2) - (2, 1, 3) \\ &= (2, 2, -4) + (-1)(2, 1, 3) \\ &= (2, 2, -4) + (-2, -1, -3) \\ &= (2 + (-2), 2, +(-1), -4 + (-3)) \\ &= (0, 1, -7) \end{aligned}$$

(d) La oss først se på vektorer av formen $a\mathbb{u}$ for en $a \in \mathbb{R}$. Dette er alle multiplum av vektoren $\mathbb{u}$ med en skalar a fra de reelle tallene $\mathbb{R}$. Å multiplisere en vektor med en (reell) skalar a er å forlenge, forkorte eller la være den samme eller motsatte vektoren avhengig om $|a| > 1$, $|a| < 1$ eller $a = \pm 1$. Dette gir at når a varierer over hele $\mathbb{R}$, så blir mengden

$$\mathcal{L}(\mathbb{u}) = \{a\mathbb{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

linjen som går igjennom eller er gitt av vektoren $\mathbb{u}$. Tilsvarende vil mengden

$$\mathcal{L}(\mathbb{v}) = \{b\mathbb{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

bli linjen som går gjennom eller som er gitt av vektoren $\mathbb{v}$. Av definisjonen av addisjon av to vektorer vil summen av to vektorer $a\mathbb{u}$ og $b\mathbb{v}$ ligge i planet gitt av linjene som går gjennom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$. Dette gir at alle punktene i mengden

$$\mathcal{P}(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = \{(x, y, z) = a\mathbb{u} + b\mathbb{v} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

ligger i planet gitt av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

Motsatt, gitt et punkt $\mathbb{x}$ i planet gitt av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$. Betrakt de linjene $\mathcal{L}(\mathbb{u})$ og $\mathcal{L}(\mathbb{v})$. Trekk to linjer $\mathcal{L}_1$ og $\mathcal{L}_2$ gjennom punktet $\mathbb{x}$, der $\mathcal{L}_1$ er parallell med $\mathcal{L}(\mathbb{u})$ og $\mathcal{L}_2$ er parallell med $\mathcal{L}(\mathbb{v})$. Kall avstanden a' (positiv hvis i samme retning som $\mathbb{u}$ eller negativ) fra origo til skjæringspunktet mellom $\mathcal{L}(\mathbb{u})$ og $\mathcal{L}_2$. Kall avstanden b' (positiv hvis i samme retning som $\mathbb{v}$ eller negativ) fra origo til skjæringspunktet mellom $\mathcal{L}(\mathbb{v})$ og $\mathcal{L}_1$. Da vil

$$\frac{a'}{||\mathbb{u}||}\mathbb{u} + \frac{b'}{||\mathbb{v}||}\mathbb{v} = \mathbb{x},$$

dvs. hvert punkt i planet ligger i $\mathcal{P}(\mathbb{u}, \mathbb{v})$.

I videoen for i dag så vi følgende resultat:

Proposisjon 1. *La $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ være i $\mathbb{R}^n$, og la $a, b \in \mathbb{R}$. Da er:*

(a) $(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w})$, *dvs. (addisjon er* assosiativ*).*

(b) *Det finnes en $\mathbb{O}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{O} = \mathbb{u} = \mathbb{O} + \mathbb{u}$$

for alle $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^n$, nemlig $\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0)$.

(c) *Gitt $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^n$, så finnes det $\mathbb{u}'$ i $\mathbb{R}^n$ slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{u}' = \mathbb{u}' + \mathbb{u} = \mathbb{O},$$

nemlig $\mathbb{u}' = (-1)\mathbb{u}$.

(d) $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$.

(e) $a(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = a\mathbb{u} + a\mathbb{v}$.

(f) $(a + b)\mathbb{u} = a\mathbb{u} + b\mathbb{u}$.

(g) $a(b\mathbb{u}) = (ab)\mathbb{u}$.

(h) $1\mathbb{u} = \mathbb{u}$.

Oppgave 2.

(a) Vis punkt (a) i Proposisjon 1.
(b) **Utfordring** Vi har sett at det eksisterer et element med samme egenskap som $\mathbb{0}$, nemlig $(0, 0, \ldots, 0)$ i $\mathbb{R}^n$. Vis at det kun eksisterer et slikt element.
(c) **Utfordring** Vis at elementet $\mathbb{u}'$ i Proposisjon 1 (c) er unikt/entydig bestemt.
(d) Vis Proposisjon 1 (d)–(h).
(e) **Utfordring** Bevis (a) og (c) bare ved å bruke egenskapene i Proposisjon 1.

Fasit: (a) La $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ og $\mathbb{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ i $\mathbb{R}^n$. Da er

$$\begin{aligned}
(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} &= ((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\
&= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n) \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n)) \\
&= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \\
&= \mathbb{u} + ((v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n)) \\
&= \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w}),
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt definisjonen av addisjon av vektorer i $\mathbb{R}^n$ i all overganger unntatt fra tredje til fjerde likhet der er assosiativiteten av addisjonen i $\mathbb{R}$ er brukt.

(b) La $\mathbb{0}'$ være et element som har samme egenskap som $\mathbb{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ i $\mathbb{R}^n$. Da er

$$\mathbb{0}' = \mathbb{0} + \mathbb{0}' = \mathbb{0},$$

hvor i første likhet bruker at $\mathbb{0}$ har egenskapen i (b) og i andre likhet bruker at $\mathbb{0}'$ har egenskapen i (b). Dette gir at det finnes kun et element med egenskapen i (b).

(c) La $\mathbb{u}'$ være et element med samme egenskap som $(-1)\mathbb{u}$. Da er

$$\begin{aligned}
\mathbb{u}' &= \mathbb{u}' + \mathbb{0} \\
&= \mathbb{u}' + (\mathbb{u} + (-1)\mathbb{u}) \\
&= (\mathbb{u}' + \mathbb{u}) + (-1)\mathbb{u} \\
&= \mathbb{0} + (-1)\mathbb{u} \\
&= (-1)\mathbb{u},
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt i likhetene (1) egenskapen til $\mathbb{O}$, (2) egenskapen til $(-1)\mathbb{u}$, (3) assosiativitet av addisjon av vektorer, (4) egenskapen til $\mathbb{u}'$, (5) egenskapen til $\mathbb{O}$. Dette gir at $\mathbb{u}' = (-1)\mathbb{u}$.

(d) – (h) Bruker tilsvarende argumenter som vi allerede har vært igjennom. Overlatt til dere.

Oppgave 3. Vi har følgende konsekvens av Proposition 1.

Korollar 2. *La* $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$ *og* $a \in \mathbb{R}$. *Da er*

(a) $0\mathbb{u} = \mathbb{O}$.
(b) $a\mathbb{O} = \mathbb{O}$.

Bevis dette resultatet. **Utfordring** Bruk kun egenskapene i Proposisjon 1.

Fasit: (a) Vi har at

$$0\mathbb{u} = (0+0)\mathbb{u} = 0\mathbb{u} + 0\mathbb{u},$$

siden $0 = 0 + 0$. Adder $-(0\mathbb{u})$ på hver side av likheten, da får vi at

$$\mathbb{O} = 0\mathbb{u}.$$

Vi har at

$$\mathbb{O} = \mathbb{O} + \mathbb{O}.$$

Multipliser hver side av likheten med a, og vi får at

$$a\mathbb{O} = a(\mathbb{O} + \mathbb{O}) = a\mathbb{O} + a\mathbb{O},$$

hvor vi har brukt egenskaper vi har for vektorer. Adder $-(a\mathbb{O})$ på hver side av likheten, da får vi at

$$\mathbb{O} = a\mathbb{O}.$$

Lengde av vektorer

Oppgave 4. La $\mathbb{u} = (2, -1, 2, -3)$ og $\mathbb{v} = (-1, -1, 1, 2)$ i $\mathbb{R}^4$.

(a) Regn ut lengden til $\mathbb{u}$.
(b) Regn ut lengden til $\mathbb{v}$.
(c) Regn ut lengden til $\mathbb{u} + \mathbb{v}$.
(d) Sammenlign $\|\mathbb{u}\| + \|\mathbb{v}\|$ og $\|(\mathbb{u} + \mathbb{v})\|$.

Fasit: (a)
$$||\mathbb{u}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+4+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$
(b)
$$||\mathbb{v}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+1+4} = \sqrt{7}.$$
(c)
$$\begin{aligned}||\mathbb{u}+\mathbb{v}|| &= ||(2-1, -1-1, 2+1, -3+2)|| \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{1+4+9+1} = \sqrt{15}.\end{aligned}$$
(d) Vi har at
$$\begin{aligned}(||\mathbb{u}|| + ||\mathbb{v}||)^2 &= 18 + 6\sqrt{14} + 7 = 25 + 6\sqrt{14} \\ (||\mathbb{u}+\mathbb{v}||)^2 &= 15.\end{aligned}$$
Fra dette ser vi at
$$||\mathbb{u}|| + ||\mathbb{v}|| \geq ||\mathbb{u}+\mathbb{v}||,$$
siden $25 + 6\sqrt{14} \geq 15$.

Vi har følgende resultat.

Proposisjon 3. *For en vektor $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^n$ og $a \in \mathbb{R}$, så er*
(a) $\|\mathbb{u}\| \geq 0$.
(b) $\|\mathbb{u}\| = 0$ *hvis og bare hvis* $\mathbb{u} = \mathbb{O}$.
(c) $\|a\mathbb{u}\| = |a|\|\mathbb{u}\|$.

Spesielt i (c): For $\mathbb{u} \neq \mathbb{O}$, så er
$$\left\|\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\mathbb{u}\right\| = \left|\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\right|\|\mathbb{u}\| = 1.$$

Vektoren $\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\mathbb{u}$ kalles *normaliseringen av* $\mathbb{u}$. En vektor med lengde 1 kalles en *enhetsvektor*.

Oppgave 5.
(a) Vis at $\mathbb{e}_1 = (1,0)$ og $\mathbb{e}_2 = (0,1)$ er enhetsvektorer i $\mathbb{R}^2$.
(b) Vis at $\mathbb{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbb{e}_2 = (0,1,0)$ og $\mathbb{e}_3 = (0,0,1)$ er enhetsvektorer i $\mathbb{R}^3$.
(c) Vis at $\mathbb{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\mathbb{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, og $\mathbb{e}_n = (0,\dots,0,1)$ er enhetsvektorer i $\mathbb{R}^n$.
(d) I $\mathbb{R}^2$ vis at enhver vektor $\mathbb{u}$ kan skrives på formen
$$\mathbb{u} = a\mathbb{e}_1 + b\mathbb{e}_2$$
for noen $a, b \in \mathbb{R}$.

(e) Kan du formulere tilsvarende resultat i $\mathbb{R}^3$ og/eller $\mathbb{R}^n$?

Fasit: (a)–(c): La $\mathbb{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, hvor i-te koordinat er 1. Da er

$$||\mathbb{e}_i||^2 = \mathbb{e}_i \cdot \mathbb{e}_i = 0 \cdot 0 + \cdots 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0 = 1.$$

Dette gir at $||\mathbb{e}_i|| = 1$.

(d) og (e): La $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Da har vi at

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_n)\\ &= a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, \ldots, 0, 1)\\ &= a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + \cdots + a_n\mathbb{e}_n.\end{aligned}$$

Dette viser (d) og (e).