Gruppearbeid 2F

Oppgave 1. Løs det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \; z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ y + \; z &= 1 \end{aligned}$$

Fasit: Overfører først systemet til totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \longleftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Siste likning svarer til $0x + 0y + 0z = -5$, som ikke har noen løsning. Dette gjør at systemet ikke er løsbart.

Oppgave 2. Løs det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \; z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= -1 \\ y + \; z &= -1 \end{aligned}$$

Fasit.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \longleftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Siste likning svarer til $0x+0y+0z = 0$, som alltid er tilfredsstilt. Dvs. denne likningen gir ingen krav på de ukjente x, y og z, slik at vi kan se bort i fra denne. De to andre likningene sier:

$$\begin{aligned} x \quad + z &= 1 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

Dette gir for alle verdier av z at

$$\begin{aligned} x &= 1 \; -z, \\ y &= -1 \; -z, \\ z &= 0 \; +z, \end{aligned}$$

som vi kan skrive som

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1 - z, -1 - z, z), \\ &= (1, -1, 0) + (-z, -z, z), \\ &= (1, -1, 0) + z(-1, -1, 1), \end{aligned}$$

hvor z er vilkårlig i $\mathbb{R}$. Dette gir at likningssystemet har uendelig mange løsninger. Merk at $(1, -1, 0)$ er en løsning av det inhomogene likningssystemet, mens $(-1, -1, 1)$ er en løsning av det homogene likningssystemet.

Oppgave 3.

(a) La S_1 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{lrrrl} L_1\colon & x & & +z & = 1 \\ L_2\colon & 2x & +3y & +5z & = 4 \end{array}$$

La S_2 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{lrrrl} L_2\colon & 2x & +3y & +5z & = 4 \\ L_1\colon & x & & +z & = 1 \end{array}$$

Vis at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1 hvis og bare hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2.

Fasit. Anta at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1. Vi ønsker å vise at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2. Det at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1, betyr at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L_1 og en løsning i L_2. Det betyr at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L_2 og L_1, dvs. at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2. Dette viser at hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1, så er (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2. Vi kan bruke de samme argumentene til å vise at hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2, så er (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1. Til samme så viser dette påstanden.

(b) La

$$L\colon 2x + 3y + 5z = 4,$$

en lineær likning. Vis at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L hvis og bare hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i

$$\frac{1}{2}L\colon x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z = 2.$$

Fasit: La $a = \frac{1}{2}$. Anta at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L. Det betyr at

$$2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = 4$$

Multipliser begge sider av denne likheten med a, og vi får:

$$a2s_1 + a3s_2 + a5s_3 = a4.$$

La aL være likningen gitt ved:

$$a2x + a3y + a5z = a4,$$

hvor (s_1, s_2, s_3) er en løsning. Dette er det samme som $\frac{1}{2}L$. Dette viser at hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L, så er (s_1, s_2, s_3) en løsning i $\frac{1}{2}L$.

Motsatt, hvis vi lar $a = 2$ (dvs. multiplikative inversen til $\frac{1}{2}$) i argumentene over, så gir dette at, hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i $\frac{1}{2}L$, så er (s_1, s_2, s_3) en løsning i L. Dette viser påstanden.

(c) La S_1 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{rcccl} L_1\colon & x & & +z & = 1 \\ L_2\colon & 2x & +3y & +5z & = 4 \end{array}$$

La S_2 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{rcccl} L_1\colon & x & & +z & = 1 \\ (-2)L_1 + L_2\colon & & 3y & +3z & = 2 \end{array}$$

Vis at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1 hvis og bare hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2.

Fasit: La (s_1, s_2, s_3) være en løsning i S_1. Da er (s_1, s_2, s_3) en løsning i L_1 og L_2, dvs.

$$s_1 + s_3 = 1$$

og

$$2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = 4.$$

Multipliser $s_1 + s_3 = 1$ med -2 og legg denne til $2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = 4$, da får vi

$$-2s_1 - 2s_3 + 2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = -2 + 4,$$

som er lik

$$3s_2 + 3s_3 = 2.$$

Dette viser at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2. Dette gir at hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1, så er (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2.

Motsatt, anta at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2. Da er (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L_1 og $(-2)L_1 + L_2$, dvs.

$$s_1 + s_3 = 1$$

og

$$3s_2 + 3s_3 = 2.$$

Multipliser $s_1 + s_3 = 1$ med 2 og legg denne til $3s_2 + 3s_3 = 2$, da får vi

$$2s_1 + 2s_3 + 3s_2 + 3s_3 = 2 + 2,$$

som er lik

$$2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = 4.$$

Dette viser at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1. Dette gir at hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2, så er (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1. Til sammen viser dette påstanden.

(d) Vis at de elementære radoperasjonene bevarer løsningsmengden av lineære likningssystemer.

Fasit: Argumentene i (a) kan generaliseres til å vise at løsningsmengden i et lineært likningsssystem ikke endres om to likninger bytter plass.

Argumentene i (b) kan generaliseres til å vise at løsningsmengden i et lineært likningsssystem ikke endres om en likning multipliseres med et element forskjellig fra null.

Argumentene i (c) kan generaliseres til å vise at løsningsmengden i et lineært likningsssystem ikke endres om en likning multipliseres med et element forskjellig fra null og adderes til en annen likning.

Vi kommer tilbake til dette senere, når vi skal se at elementære radoperasjoner kan utføres med å multiplisere med en inverterbar matrise.