# MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri. 08-2023

## Oppgave 1

(a) Totalmatrisen for likningssystemet er gitt ved

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -1 & -6 \\ 8 & 5 & 2 & 15 \\ -4 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 15 \\ -4 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} -8 \quad 4 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot -\frac{1}{2} \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 3 - 2x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Dette gir alle løsningene $\mathbf{x}$ i $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når $x_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Kolonnene i $A$ er

$$\begin{matrix} -3 & 8 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix} \quad -2 \quad -3$$

Finner redusert trappeform av denne matrisen.

$$\begin{matrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix} \quad -2$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \end{matrix}$$

Det impliserer at $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for kolonnerommet til matrisen $A$.

Oppgave 2.

(a) Vi har at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 4, 3)$. Dette gir

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{og}$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}.$$

For to vilkårlige vektorer $\mathbf{s}$ og $\mathbf{t}$ i $\mathbb{R}^3$ tilfredsstiller de den såkalte trekantulikheten:

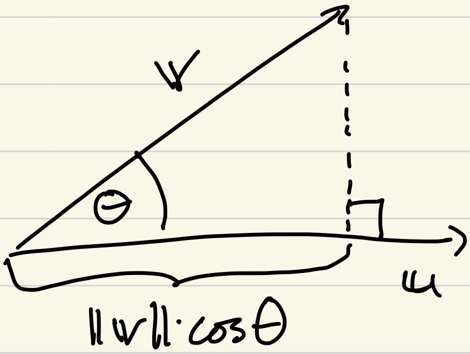
$$\|\mathbf{s} + \mathbf{t}\| \leq \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{t}\|$$

(b) Vi har at hvis $\theta$ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, så er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

Dette gir at

$$\frac{u\cdot v}{\|u\|} = \|v\|\cdot\cos\theta.$$




Vi ser at absoluttverdien av denne lengden er lengden av projeksjonen av vektoren $v$ langs vektoren $u$.

Vi har at $\frac{u\cdot v}{\|u\|} = \frac{-2+4+2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

To ikke-null vektorer er ortogonale hvis og bare hvis skalarproduktet er null. Vi har

$$\left(v - \frac{u\cdot v}{\|u\|^2}u\right)\cdot u = \underbrace{v\cdot u}_{\parallel} - \frac{u\cdot v}{\|u\|^2}\underbrace{u\cdot u}_{\parallel}$$

$$= u\cdot v - \frac{u\cdot v}{\cancel{\|u\|^2}}\cancel{\|u\|^2} = 0.$$

Dette viser at vektorene er ortogonale.

Den korteste avstanden fra punktet gitt av $v$ og linjen gitt av $u$, er gitt av en vektor som starter i $v$ og står ortogonalt på $u$. En slik vektor er nettopp

$$w = v - \frac{u\cdot v}{\|u\|^2}u = v - \frac{u\cdot v}{\|u\|}\cdot\frac{u}{\|u\|}$$
$$= (-1,2,2) - \frac{4}{3}\,\frac{1}{3}(2,2,1)$$
$$= (-1,2,2) - \frac{1}{9}(8,8,4)$$
$$= \left(-\frac{9}{9}, \frac{18}{9}, \frac{18}{9}\right) - \frac{1}{9}(8,8,4)$$
$$= \frac{1}{9}(-17, 10, 14)$$

Da er $\|w\| = \sqrt{\frac{1}{81}(289+100+196)} = \sqrt{\frac{1}{81}585} = \frac{65}{9}$ den korteste avstanden.

## Oppgave 3

(a) Vi regner ut $A \cdot U$, der $U = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$.
Da har vi

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 18 & -36 & 0 \\ 36 & -18 & 0 \\ 36 & 36 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}}_{=U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=D}$$

Dette viser at $u_1$ og $u_2$ er egenvektorer med egenverdi 2, mens $u_3$ er en egenvektor med egenverdi 0.

Anta at $w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$. Da er

$$Aw = A(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)$$
$$= a_1 \underbrace{A u_1}_{2u_1} + a_2 \underbrace{A u_2}_{2u_2} + a_3 \underbrace{A u_3}_{=0} = A0 = 0$$
$$= 2a_1 u_1 + 2a_2 u_2 = 0$$

Da må $a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$, som gir totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot 3 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \cdot -\frac{1}{5} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Siden $a_1 = a_2 = 0$, så må $a_3 u_3 = 0$, som medfører at $a_3 = 0$. Dette viser at $\{u_1, u_2, u_3\}$ er lineært uavhengig.

(b) Vi har at

$$B^T B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = I_3.$$

Siden $\det(B^T B) = \det(B^T)\det(B) = \det(I_3) = 1$, så er $\det(B) \neq 0$ og $B$ er invertbar. Multipliserer vi likheten $B^T B = I_3$ fra høyre med $B^{-1}$ får vi

$$\underbrace{B^T B \cdot B^{-1}}_{= B^T \cdot I_3 \,=\, B^T} = I_3 \cdot B^{-1} = B^{-1}$$

Dette viser at $B^T = B^{-1}$.

Siden $B^T \cdot B = I_3$, så er vektorene $\{u_1, u_2, u_3\}$ en ortogonal mengde vektor med lengde 1.

(c) La $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$, der $B$ er matrisen fra B. Da er

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T B^T \underbrace{A B}_{= BD} \mathbf{y} \quad \longleftarrow \text{fra (a).}$$

$$= \mathbf{y}^T B^T B D \mathbf{y}$$

$$= [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Siden $\det(A\cdot(I_3 - cuv^T)) = \det(A)\det(I_3 - cuv^T)$
$= \det(I_3) = 1$,
så må $\det(A) \neq 0$ og $A$ er inverterbar.
Multipliserer vi likheten (*) fra venstre med $A^{-1}$, får vi at
$$A^{-1} = I_3 - cuv^T.$$

## Oppgave 5

Vi har at
$$A'x = E_t E_{t-1} \cdots E_2 E_1 Ax = E_t E_{t-1} \cdots E_2 E_1 b = b'$$
Matrisen $A'$ har formen

$$s\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ & & & & & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & 1 & * \cdots * \\ 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Da ser vi at det er løsbart for alle
$$b' = \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_s' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
med $(b_1', b_2', \ldots, b_s')$ vilkårlig i $\mathbb{R}^s$. Dette gir at det opprinnelige likningssystemet løsbart for $b$ som tilfredsstiller
$$E_t \cdots E_1 b = \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_s' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Multipliser fra venstre med $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_t^{-1}$, og vi får
$$b = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_t^{-1} \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_s' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$
når $(b_1', \ldots, b_s')$ er fritt valgt i $\mathbb{R}^s$. Dette gir for hvilke $b$ det opprinnelige systemet er løsbart.