NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Faglig kontakt under prøven: Petter Andreas Bergh og Øyvind Solberg
Tlf: 92032532/47377952

Dato for prøven: 17. august 2023
Prøvetid (fra–til): 09:00-13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 3
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Gitt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$ som matrise og vektor over de reelle tallene $\mathbb{R}$. Løs ligningssystemet

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

over $\mathbb{R}$ dvs. løs det lineære ligningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -6 \\ 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 15 \\ -4x_1 - 2x_2 &= -6 \end{aligned}$$

b) Finn en basis for kolonnerommet til matrisen A. Hva er rangen til matrisen A?

Oppgave 2 Betrakt vektorene $\mathbb{u} = (2, 2, 1)$ og $\mathbb{v} = (-1, 2, 2)$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Finn lengden av de tre vektorene $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{u} + \mathbb{v}$. Gitt vilkårlige vektorer $\mathbb{s}$ og $\mathbb{t}$ i $\mathbb{R}^3$, hva sier trekantulikheten om forholdet mellom lengdene av $\mathbb{s}$, $\mathbb{t}$ og $\mathbb{s} + \mathbb{t}$?

b) For de to ikke-null vektorene $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ fra deloppgave (a), forklar hvilken lengde

$$\left| \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|u\|} \right|$$

beregner, og finn den for vektorene $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

Vis at

$$\mathbb{u}$$

og

$$\mathbb{v} - \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|u\|^2}\mathbb{u}$$

er ortogonale vektorer. Finn den korteste avstanden fra punktet gitt av $\mathbb{v}$ og linjen som er gitt av $\mathbb{u}$, eller ekvivalent, som går langs vektoren $\mathbb{u}$.

Oppgave 3 La

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at

$$\mathbb{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{u}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

og

$$\mathbb{u}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for matrisen A, og bestem de tilhørende egenverdiene for hver av de. Vis eller forklar hvorfor mengden $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}$ er en lineært uavhengig mengde av vektorer.

b) La $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at $B^{-1} = B^T$. Hva betyr dette for mengden av vektorene $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}$?

c) La $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Da er

$$\mathbb{x}^T A \mathbb{x} = \frac{1}{9}(10x_1^2 + 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 10x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2).$$

Finn en matrise P slik at

$$P^{-1}AP$$

er en diagonal matrise, og bestem hvilken geometrisk objekt eller mengde er gitt ved

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{9}(10x_1^2 + 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 10x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2) = 0\}.$$

Oppgave 4

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & a+2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

hvor a er et reelt tall. Beregn determinanten til A, og avgjør når matrisen A er invertbar.

b) La $B = I_3 + \mathbb{u}\mathbb{v}^T$, hvor I_3 er 3×3 identitetsmatrisen,

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbb{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

og hvor skalarproduktet mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er forskjellig fra -1, eller ekvivalent, matriseproduktet

$$\mathbb{v}^T\mathbb{u} \neq -1.$$

Vis at B er invertbar og at $B^{-1} = I_3 - c\mathbb{u}\mathbb{v}^T$ med $c = \frac{1}{1+\mathbb{v}^T\mathbb{u}}$.

Oppgave 5 I denne oppgaven er A en $m \times n$-matrise, $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alle matriser og vektorer er over $\mathbb{R}$. Når vi skal løse et lineært ligningssystem

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b},$$

så radreduserer vi den tilhørende totalmatrisen for å få et trapperedusert lineært ligningssystem

$$A'\mathbb{x} = \mathbb{b}',$$

hvor $A' = E_tE_{t-1}\cdots E_2E_1A$ for elementære matriser E_i med $i = 1, 2, \ldots, t$. Anta at rangen til A er lik s. Finn for hvilke $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^m$ det lineære ligningssystemet

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

er løsbart uttrykt ved hjelp av de elementære matrisene $\{E_i\}_{i=1}^t$.