GRUPPEARBEID 23F

KOMPLEKSE TALL

Oppgave 1.

(a) Regn ut $(2+3i)(1-i)$.

(b) Finn

$$\overline{2+3i}$$

og

$$\overline{1-i}.$$

(c) Regn ut

$$(2+3i)(\overline{2+3i})$$

og

$$(1-i)(\overline{1-i}).$$

(d) Finn

$$(2+3i)^{-1}$$

og

$$(1-i)^{-1}.$$

(e) Regn ut

$$\frac{2+3i}{1-i}.$$

Oppgave 2.

(a) Regn ut $(3+4i)(1-2i)$.

(b) Finn

$$\overline{3+4i}$$

og

$$\overline{1-2i}.$$

(c) Regn ut

$$(3+4i)(\overline{3+4i})$$

og

$$(1-2i)(\overline{1-2i}).$$

(d) Finn

$$(3+4i)^{-1}$$

og

$$(1-2i)^{-1}.$$

(e) Regn ut

$$\frac{3+4i}{1-2i}.$$

Oppgave 3.

(a) La z være i $\mathbb{C}$. Vis at $z + \overline{z}$ er i $\mathbb{R}$, spesielt $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
(b) La z være i $\mathbb{C}$. Vis at $z - \overline{z}$ er i $\mathbb{R}i$, spesielt $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$.
(c) La z være i $\mathbb{C}$. Vis at $z\overline{z}$ er i $\mathbb{R}$, spesielt $z\overline{z} = |z|^2$.

Oppgave 4.

(a) Løs likningen $z^2 = -2$.
(b) Løs likningen $(z+1)^2 = -2$.
(c) Løs likningen $z^2 + bz + \frac{b^2}{4} + c = 0$ hvor $b, c \in \mathbb{R}$ med $c > 0$.
(d) Løs likningen $z^2 + bz + c = 0$ hvor $b, c \in \mathbb{R}$.

Oppgave 5.

(a) La $z = a + bi$ i $\mathbb{C}$. La $c = |z|$. Vis at

$$\left(\sqrt{\frac{c+a}{2}} + \sqrt{\frac{c-a}{2}}i\right)^2 = a + bi$$

for $b \geq 0$, og at

$$\left(\sqrt{\frac{c+a}{2}} - \sqrt{\frac{c-a}{2}}i\right)^2 = a + bi$$

for $b < 0$.

(b) **Utfordring:** La

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

med $a_i \in \mathbb{R}$ for $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Husk at a kalles en rot i $f(z)$ hvis $f(a) = 0$. Vis at hvis a er en rot i $f(z)$, så er også $\overline{a}$ en rot i $f(z)$.

(c) **Utfordring:** La

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

med $a_i \in \mathbb{R}$ for $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Anta at $f(z)$ har n røtter $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ i $\mathbb{C}$, dvs.

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_n).$$

Vis at $f(z)$ er et endelig produkt av første og andre grads polynom over $\mathbb{R}$.

Vi har følgende resultat.

Fundamentalteoremet for algebra. *La*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

with $a_i \in \mathbb{C}$. Da har $f(z)$ en rot α i $\mathbb{C}$.

Et bevis for dette resultatet som bruker

- at alle polynomer av odde grad og reelle koeffisienter har en reell rot,
- at alle komplekse tall har en kvadratrot,

- lineær algebra,

finnes i en artikkel av Harm Derksen:

`https://math.berkeley.edu/~ribet/110/f03/derksen.pdf`