

GRUPPEARBEID 22F

ORTOGONAL DIAGONALISERING OG KJEGLESNITT

Oppgave 1. (Eksamen H2021, Oppgave 3)

(a) Forklar hvorfor matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

er ortogonalt diagonaliserbar. Finn en diagonalmatrise D og en ortogonal matrise P slik at $D = P^T A P$. Gi en geometrisk tolkning av lineæravbildningen T_P . (Dette siste betyr bare: hva gjør matrisen P med vektorer i \mathbb{R}^2 ?)

(b) Beskriver

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 2$$

en parabel, en hyperbel eller en ellipse? Skisser kurven. (En skisse er godt nok, den trenger ikke å være nøyaktig.)

Oppgave 2. (Eksamen H2016, Oppgave 6)

Målet med denne oppgaven er å undersøke kjeglesnittet gitt ved ligningen

$$x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 - 2\sqrt{3}x_1 - 2x_2 = 0.$$

(a) Finn en ortogonal matrise B slik at

$$B^T \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} B$$

er en diagonalmatrise.

(b) Innfør et nytt koordinatsystem der kjeglesnittet er på standardform, det vil si slik at formelen i nye koordinater (y_1, y_2) ikke har noe ledd y_1y_2 . Skisser kjeglesnittet.

Oppgave 3. (Eksamen H2017, Oppgave 4) La

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestem egenverdiene og egenvektorene til matrisen S .
(b) Ved å vise til teorien, gi to forskjellige forklaringer for hvorfor egenvektorene til S er lineært uavhengig. (Hint: ortogonale, egenrom).
(c) Betrakt kjeglesnittet gitt ved

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0.$$

Bestem hvorvidt det er en ellipse, en hyperbel eller en parabel, ved først å overføre den kvadratiske formen

$$3x^2 + 2xy + 3y^2$$

til standard form uten blandingsledd/kryssledd xy ved å benytte en symmetrisk matrise A og en ortogonal matrise P . Husk å oppgi ditt valg av A og P .