GRUPPEARBEID 21F

Ortogonal diagonalisering I

Oppgave 1. Foreta ortogonal diagonalisering av (den symmetriske) matrisen A: finn en diagonalmatrise D og en ortogonal matrise P slik at $A = PDP^T$.

(a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2.

(a) Anta at P er en ortogonal matrise med determinant lik -1. Hva skjer hvis du bytter om to av kolonnene i P?

(b) La A være en symmetrisk matrise. Da vet vi fra Teorem 69 at A er ortogonalt diagonaliserbar. Vis at i denne diagonaliseringen så kan vi bruke en ortogonal matrise P som har determinant lik 1.

Ortogonal diagonalisering II

Oppgave 1. I 17F hadde vi følgende oppgave:

La

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

være en generell 2×2-matrise. Vis at følgende holder:

(i) Dersom $(a-d)^2 + 4bc < 0$, så har A ingen egenverdier i $\mathbb{R}$.

(ii) Dersom $(a-d)^2 + 4bc = 0$, så har A én egenverdi i $\mathbb{R}$.

(iii) Dersom $(a-d)^2 + 4bc > 0$, så har A to ulike egenverdier i $\mathbb{R}$.

Bruk resultatet fra oppgaven fra 17F til å vise at en symmetriske 2×2-matrise $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ alltid er (ortogonalt) diagonaliserbar.

Oppgave 2. La

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 23 \\ 12 & 2 & -21 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

(a) Finn det karakteristiske polynomet til A.

(b) La $\mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. La $\mathbb{u}_2 = B\mathbb{u}_1$ og $\mathbb{u}_3 = B\mathbb{u}_2$. Vis at $\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}$ er lineært uavhengig, og at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

(c) Vis at $(B\mathbb{u}_3)_{\mathcal{B}} = (8, -12, 6)$?

(d) Finn $C = m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T_A)$. Sammenlikn siste kolonne i C med det karakteristiske polynomet til A. Noe som er felles?

Oppgave 2, utfordring.

(a) La $\mathbb{v}_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ forskjellig fra nullvektoren. Betrakt matrisen A_1 som har $\mathbb{v}_1$ som eneste rad. Betrakt det lineære likningssystemet

$$A_1\mathbb{x} = \mathbb{O}.$$

Vis at nullrommet $N(A_1)$ til A_1 har dimensjon $n - 1$. Hva er forholdet mellom $\mathbb{v}_1$ og alle vektorene i $N(A_1)$?

(b) Velg en ikke-null vektor $\mathbb{v}_2$ i $N(A_1)$. Betrakt matrisen A_2 som har $\mathbb{v}_1$ og $\mathbb{v}_2$ som de eneste 2 radene i A_2. Hvorfor er $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ er en lineært uavhengig mengde? Betrakt det lineære likningssystemet

$$A_2\mathbb{x} = \mathbb{O}.$$

Vis at nullrommet $N(A_2)$ til A_2 har dimensjon $n - 2$. Hva er forholdet mellom vektorene $\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ og alle vektorene i $N(A_2)$?

(c) Anta at $\mathbb{v}_1$ har lengde 1. Vis at vi kan velge en ortonormal basis av $\mathbb{R}^n$ der $\mathbb{v}_1$ er første vektor. (Dette gir et bevis for påstanden i starten av beviset for Teorem 68).

Oppgave 3, utfordring. Vis at følgende er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A:

(a) A er ortogonalt diagonaliserbar.

(b) A har n egenvektorer som er en ortonormal mengde.