GRUPPEARBEID 20F

Ortogonale matriser I

Oppgave 1. Avgjør hvilke av matrisene som er ortogonale.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt(3) & 1/\sqrt(3) & 1/\sqrt(3) \\ 0 & 1/\sqrt(2) & -1/\sqrt(2) \\ 2/\sqrt(6) & -1/\sqrt(6) & -1/\sqrt(6) \end{bmatrix}$$

Oppgave 2. Verifiser at matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt(5) & -1/\sqrt(5) \\ 1/\sqrt(5) & 2/\sqrt(5) \end{bmatrix}$$

er ortogonal, og vis direkte (ved utregning) at $\|P\mathbb{v}\| = \|\mathbb{v}\|$ for alle vektorer $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^2$.

Ortogonale matriser II

Oppgave 1. La

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Finn egenverdiene til A og de tilhørende egenvektorene.
(b) Vis at vi kan velge en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående av to ortonormale egenvektorer $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$.
(c) Finn et ortogonal matrise P slik at

$$P^{-1}AP = P^TAP$$

er en diagonalmatrise.
(d) La

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

For matrisen P du fant i (c) la

$$\mathbb{x} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\mathbb{x}',$$

der $\mathbb{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Hva blir

$$\mathbb{x}^T A \mathbb{x}$$

uttrykt ved hjelp av $\mathbb{x}'$.

Oppgave 2. Utfordring: bevisoppgave. La P være en ortogonal $n \times n$-matrise.

(a) Vis at også P^T er en ortogonal matrise.

(b) Anta at $n = 3$. Vis at de tre radvektorene i P danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

(c) Vis at $(P\mathbb{u}) \cdot (P\mathbb{v}) = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$ for alle (kolonnevektorer) $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$. (Bruk at skalarproduktet $\mathbb{w}_1 \cdot \mathbb{w}_2$ er det samme som matriseproduktet $\mathbb{w}_1^T \mathbb{w}_2$.)

(d) Bruk (b) til å vise at $\|P\mathbb{v}\| = \|\mathbb{v}\|$ for alle vektorer $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$.

(e) Vis at determinanten til P er enten 1 eller -1. (Hva er determinanten til PP^T?)