GRUPPEARBEID 19F

Egenverdier og egenvektorer II

Oppgave 1. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & e \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn det karakteristiske polynomet til matrisen A, og se at røttene i det stemmer med egenverdiene vi fant i 17F, Oppgave 1 a).
(b) Diagonaliser A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

Oppgave 2. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn det karakteristiske polynomet til matrisen A, og se at røttene i det stemmer med egenverdiene vi fant i 17F, Oppgave 1 b).
(b) Finn en basis for egenrommet tilhørende egenverdien $\lambda = 2$. Er A diagonaliserbar?

Utfordring: La A være en $n \times n$-matrise over $\mathbb{R}$. Anta at λ er en egenverdi for A med multiplisitet t, og at $\dim E(\lambda) = s$. Vis at $s \leq t$.

Hint:

(i) Velg en basis $\mathcal{B}(\lambda) = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s\}$ for $E(\lambda)$.
(ii) Utvid $\mathcal{B}(\lambda)$ til en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$, der vektorene i $\mathcal{B}(\lambda)$ utgjør de s første basisvektorene. Vis at A er similær med en matrise B på formen

$$\begin{bmatrix} \lambda I_s & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

(iii) Vis at vi har

$$\det(xI_n - A) = \det(xI_n - B) = (x - \lambda)^s \det(xI_{n-s} - A_{2,2})$$

Konkluder med at multiplisiteten til λ er minst s, dvs. at vi har $s \leq t$.

Egenverdier, egenvektorer og diagonalisering

Oppgave 1. La

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 16 & -23 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) Vis at $(1, 0, 2)$ er en egenvektor for A, og finn den tilhørende egenverdien.
(b) Finn alle egenverdiene til A. Avgjør om A er diagonaliserbar.
(c) Finn de tilhørende egenvektorene til alle egenverdiene.
(d) Hvis A er diagonaliserbar, finn en invertbar matrise P som diagonaliserer A.

Oppgave 2. La A være en 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ med egenverdiene $\{-1, 1, 3\}$. Hvilken diagonalmatrise er A similær med?

Oppgave 3, bonus. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Finn alle egenverdiene til A.
(b) Finn egenvektorene til de forskjellige egenverdiene.
(c) Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise.