GRUPPEARBEID 18F

Bytte av basis

Oppgave 1. (Regnes på starten av 1. time)
La $\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}$, hvor

$$\mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{u}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi har tidligere sett at dette er en basis for $\mathbb{R}^3$.

(a) Finn overgangsmatrisene $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_3}$ og $P_{\mathcal{S}_3}^{\mathcal{B}}$.

(b) Vis at for vektoren $\mathbb{u} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ -20 \end{bmatrix}$ så er $(\mathbb{u})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2.

(a) La $\mathcal{B} = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$, hvor

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vis at $\mathcal{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

(b) Finn overgangsmatrisene $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_3}$ og $P_{\mathcal{S}_3}^{\mathcal{B}}$.

(c) Vis at for vektoren $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}$ så er $(\mathbb{v})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) Finn $(\mathbb{u})_{\mathcal{B}}$ for vektoren $\mathbb{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Utfordring: La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en linear transformasjon. Da eksisterer en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$ og en basis $\mathcal{B}'$ for $\mathbb{R}^m$ slik at

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bytte av basis og diagonalisering

Definisjon. La $\mathbb{R}[x]$ betegne mengden av alle polynomer $f(x)$ i den ukjente variabelen x. Hvis

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

med $a_i \in \mathbb{R}$ og $a_n \neq 0$, så er graden til $f(x)$ lik n, og vi skriver $\deg f(x) = n$. Hvis $f(x) = 0$, så setter vi $\deg f(x) = -\infty$.

Teorem. *La $f(x)$ og $g(x)$ være to polynomer i $\mathbb{R}[x]$.*

(a) *Hvis* $\deg f(x) = m \geq 0$ *og* $\deg g(x) \geq 0$, *så er*

$$f(x)g(x) \neq 0$$

og

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

(b) *Gitt to ikke-null polynomer $f(x)$ og $g(x)$, så eksisterer det polynomer $q(x)$ og $r(x)$ i $\mathbb{R}[x]$ slik at*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

med $r(x) = 0$ *eller* $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$.

(c) *La $\lambda \in \mathbb{R}$. Da er*

$$f(\lambda) = 0$$

hvis og bare hvis

$$f(x) = (x - \lambda)f_1(x)$$

for et polynom $f_1(x)$ i $\mathbb{R}$ med $\deg f_1(x) = \deg f(x) - 1$.

Utfordring: Bevis teoremet over.

Oppgave 1. (Regnes på starten av 2. time) La

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for matrisen A, og bestem den tilhørende egenverdien. Finn alle egenverdiene og egenvektorene for A, og vis at A har tre lineært uavhengige egenvektorer.

(b) La $\mathcal{B}$ være basisen for $\mathbb{R}^3$ gitt av de tre forskjellige egenvektorene. Finn overgangsmatrisene $P_{\mathcal{S}_3}^{\mathcal{B}}$ og $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_3}$, og finn hvilken diagonalmatrise A er similær til.

Oppgave 2. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ (fra 14F Dimensjon av vektorrom, Oppgave 1)

(a) Verifiser at vektorene
$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
er egenvektorer for matrisen A og finn de tilhørende egenverdiene.

(b) Finn overgangsmatrisene $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_3}$ og $P_{\mathcal{S}_3}^{\mathcal{B}}$.

(c) Diagonaliser matrisen A.