## GRUPPEARBEID 17F

### Egenverdier og egenvektorer

**Definisjon.** Gitt en $n \times n$-matrise $A$ med en egenverdi $\lambda$, så kalles

$$E(\lambda) = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}\}$$

*egenrommet for egenverdien* $\lambda$.

**Oppgave 1.** Verifiser at de gitte vektorene er egenvektorer for de gitte matrisene (og finn de tilhørende egenverdiene).

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & e \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

]

**Oppgave 2.** Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

roterer vektorene i $\mathbb{R}^2$ med en vinkel $\theta$ mot klokken (se for eksempel midt på side 87 i læreboken). Diskuter egenverdier og egenvektorer for denne matrisen, fra et geometrisk synspunkt.

**Utfordring: Oppgave 3.** La

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

være en generell $2 \times 2$-matrise. Vis at følgende holder:

(i) Dersom $(a-d)^2 + 4bc < 0$, så har $A$ ingen egenverdier i $\mathbb{R}$.
(ii) Dersom $(a-d)^2 + 4bc = 0$, så har $A$ én egenverdi i $\mathbb{R}$.
(iii) Dersom $(a-d)^2 + 4bc > 0$, så har $A$ to ulike egenverdier i $\mathbb{R}$.

## Egenverdier, egenvektorer og diagonalisering

**Oppgave 1.** Finn de karakteristiske polynomene, egenverdiene og basiser for egenrommene for de gitte matrisene. Avgjør om matrisen er diagonaliserbar, og eventuelt hvilken diagonalmatrise den er similær til.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 12 & -30 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

for tre ulike tall $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(d) Fra Oppgave 1 (b) fra første time.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**Utfordring: Oppgave 2.** La $A$ være $n \times n$-matrisen gitt ved
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Vis at
$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$