GRUPPEARBEID 16F

Lineær transformasjoner I

Oppgave 1. Avgjør hvilke av funksjonene T fra $\mathbb{R}^2$ til enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^2$ er lineær transformasjoner.

(a) (i) Definer $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved at

$$T((a,b)) = (2a - 3b, -3a + 2b)$$

for alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Definer $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved at

$$T((a,b)) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

for alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Definer $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved at

$$T((a,b)) = (-b, a)$$

for alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(b) I de tilfellene hvor T er en lineær transformasjon i punkt (a), finn standardmatrisen til T.

(c) (i) For funksjonen i punkt (i) i punkt (a) vis at

$$T((1,1)) = -(1,1)$$

og at

$$T((-1,1)) = 5(-1,1).$$

(ii) Vis at $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

(iii) **Utfordring:** Kan du, med å bruke $\mathcal{B}$, gi en geometrisk tolkning av T?

Lineær transformasjoner II

Oppgave 1. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Betrakt den tilhørende lineær transformasjonen $T_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved at $T_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$ for alle $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^3$. La $\mathbb{u} = (2,0)$ og $\mathbb{v} = (3,4)$.

(a) Hva er arealet F_1 av parallellogrammet utspent av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$?

(b) Hva er arealet F_2 av parallellogrammet utspent av $T_A(\mathbb{u})$ og $T_A(\mathbb{v})$?

(c) Hva er forholdet mellom F_1 og F_2? Hva er $\det(A)$?

(d) Utfordring: Kan du forklare hvorfor det er sammenheng mellom $\frac{F_2}{F_1}$ og $\det(A)$?

Husk: Gitt to vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^2$, så er arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ gitt ved

$$\|\mathbb{u} \times \mathbb{v}\| = |\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix})|.$$

Utfordring: Har vi noe tilsvarende for 3×3-matriser og volumet av parallellepipeder?

Oppgave 2. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$. Betrakt den tilhørende lineær transformasjonen $T_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved at $T(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$ for alle $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^3$.
(a) Finn bildet $\operatorname{Im} T$ av T, og finn kjernen $\operatorname{Ker} T$ av T.
(b) Er T 1–1? Er T på?

Husk: En lineær transformasjon $T \colon V \to W$ er 1–1 hvis

$$\mathbb{u} \neq \mathbb{v} \in V \Rightarrow T(\mathbb{u}) \neq T(\mathbb{v}).$$

Proposisjon 54. *Følgende er ekvivalent for en lineær transformasjon $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (eller $T \colon V \to W$):*
(a) *T er* 1–1.
(b) *Hvis $\mathbb{u} \neq \mathbb{O}$ i $\mathbb{R}^n$, så er $T(\mathbb{u}) \neq \mathbb{O}$ i $\mathbb{R}^m$.*
(c) *Hvis $T(\mathbb{u}) = \mathbb{O}$ i $\mathbb{R}^m$, så er $\mathbb{u} = \mathbb{O}$ i $\mathbb{R}^n$.*
(d) *Hvis A er den tilhørende standardmatrisen til T, så har*

$$A\mathbb{x} = \mathbb{O}$$

kun en løsning, dvs. $N(A) = \{\mathbb{O}\}$.

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b): Anta at T er 1–1. Hvis vi lar $\mathbb{v} = \mathbb{O}$ i definisjonen av 1–1, så sier den at hvis $\mathbb{u} \neq \mathbb{O} \in \mathbb{R}^n$, så er $T(\mathbb{u}) \neq T(\mathbb{O})$. Siden vi $T(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$ i $\mathbb{R}^m$, følger (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): Det logiske utsagnet

$$p \Rightarrow q$$

er ekvivalent med at

$$\neg q \Rightarrow \neg p,$$

dvs. at

$$\text{ikke } q \Rightarrow \text{ ikke } p.$$

Dette gir at (b) er det samme som

$$\text{ikke } T(\mathbb{u}) \neq \mathbb{O} \Rightarrow \text{ikke } \mathbb{u} \neq \mathbb{O} \in \mathbb{R}^n,$$

som igjen er det samme som

$$T(\mathbb{u}) = \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{u} = \mathbb{O} \in \mathbb{R}^n.$$

Det siste er det samme som utsagnet i (c).

(c) $\Leftrightarrow$ (d): La $A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_m}(T)$, dvs. A er standardmatrisen til T. Da har vi at $T(\mathbb{u}) = A\mathbb{u}$ for alle $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$.

Anta at (c) holder: Hvis $T(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^m$, så er $\mathbb{u} = \mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^n$. Ønsker å vise at (d) holder. Anta at $A\mathbb{u} = \mathbb{0}$ for en $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^n$. Av kommentaren over så er dette det samme som at $T(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$. Siden (c) gjelder, så følger det at $\mathbb{u} = \mathbb{0}$, og det betyr at

$$N(A) = \{\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{u} = \mathbb{0}\} = \{\mathbb{0}\}.$$

Anta at (d) holder: $N(A) = \{\mathbb{0}\}$. Ønsker å vise at (c) holder. Anta at $T(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$ for en $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^n$. Siden $T(\mathbb{u}) = A\approxeq = \mathbb{0}$, så er $\mathbb{u} \in N(A) = \{\mathbb{0}\}$. Dermed må $\mathbb{u} = \mathbb{0}$ og (c) holder. Dette viser at (c) og (d) er ekvivalente.

Utfordring: Fullfør beviset av Proposisjon 54. $\square$

Proposisjon 55. *La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformasjon med tilhørende standardmatrise $A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_m}(T)$.*

(a) *T er 1–1 hvis og bare hvis $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har nøyaktig en løsning.*
(b) *T er på hvis og bare hvis $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er løsbar for alle $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$.*
(c) *T er 1–1 og på hvis og bare hvis A er invertbar.*

Utfordring: Bevis Proposisjon 55.

Utfordring: Bevis følgende påstander: La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformasjon med tilhørende standardmatrise $A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_m}(T)$. Da holder følgende:

(a) T er 1–1 medfører at $m \geq n$.
(b) T er 1–1 medfører at det eksisterer en matrise B slik at $BA = I_n$.
(c) T er på medfører at $n \geq m$.
(d) T er på medfører at det eksisterer en matrise B slik at $AB = I_m$.