GRUPPEARBEID 15F

Rad-/kolonne-rom, nullrom og rang I

Gjentar Oppgave 2 fra 14F.

Oppgave 1. Betrakt det lineære likningssystemet gitt av

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + 9x_4 - 7x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 10x_4 + 8x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 6x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(1) Løs likningssystemet gitt over.
(2) La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 6 & -4 & -10 & 8 \\ 3 & 10 & -7 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Finn $N(A)$ og bestem $\dim N(A)$.
(3) Finn $C(A)$ og bestem $\dim C(A)$.
(4) Finn alle løsningene av det lineære likningssystemet

$$A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbb{b}.$$

Er mengden av alle løsningene av $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ et vektorrom?

Oppgave 2. La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 14 & 13 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Finn en basis $\mathcal{B}$ for $R(A)$, og bestem rangen til A.
(b) Finn en basis $\mathcal{B}'$ for $N(A)$, og verifiser nullitet pluss rang teoremet for A.
(c) Vis at $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ er lineært uavhengig. Vis at vektoren

$$\mathbb{u} = (1, 0, 1/2, 7/2)$$

kan skrives som en sum av et element fra $N(A)$ og et element fra $R(A)$.

Utfordring: Oppgave 3. La A være en $m \times n$-matrise.
(a) Vis at $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$.
(b) Vis at $\mathrm{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Rad-/kolonne-rom, nullrom og rang II

Oppgave 1. La A være matrisen fra Oppgave 2 i forrige time, og betegn for vanlig de fire kolonnevektorene med $\mathbb{c}_1(A), \mathbb{c}_2(A), \mathbb{c}_3(A), \mathbb{c}_4(A)$. Vis at $\{\mathbb{c}_1(A), \mathbb{c}_3(A)\}$ danner en basis for $C(A)$. Hvor befant de ledende enerne i $\mathrm{Red}(A)$ seg?

Påstand. *La A være en $m \times n$-matrise. En basis for $C(A)$ vil være de kolonnevektorene i A som svarer til de kolonnene i* $\mathrm{Red}(A)$ *hvor det er ledende enere.*

Utfordring: Bevis påstanden over. Vi får bruk for følgende. Tidligere har vi sett at $\mathrm{Red}(A) = EA$ for en inverterbar $m \times m$-matrise E. Husk at $E\mathbb{c}_1(A), \ldots, E\mathbb{c}_n(A)$ kolonnevektorene i $\mathrm{Red}(A)$, hvor $\mathbb{c}_1(A), \ldots, \mathbb{c}_n(A)$ som vanlig betegner kolonnevektorene i A.

Teorem 52. *La A være en $m \times n$-matrise. Følgende er ekvivalent:*
(a) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *er løsbart for alle* $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$.
(b) $\mathrm{rang}(A) = m$.

Proof. (a) Teorem 42 (a) sier at $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er løsbar hvis og bare hvis $\mathbb{b} \in C(A)$. Utsagnet i (a) over sier at $\mathbb{R}^m \subseteq C(A)$. Siden vi alltid har at $C(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, så følger det at $C(A) = \mathbb{R}^m$. Dette gir at $\mathrm{rang}(A) = \dim C(A) = m$.

Utfordring: Fullfør beviset av Teorem 52. $\square$