Prøveeksamen

Oppg 1(a)

Determinanten er $1 \cdot \begin{vmatrix} t & 3 \\ 0 & t-2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-2) - 3\big(3(t-2)+6\big)$

$$= t^2 - 2t - 9t$$

$$= t(t-11)$$

Så $\det = 0 \iff t \in \{0, 11\}$, og matrisen er inverterbar for alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 11\}$.

(b) La A være matrisen fra (a). Da er systemet gitt ved

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

hvor $\bar{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 33 \\ -22 \end{pmatrix}$. Siden A er inverterbar for $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 11\}$ har systemet en unik løsning (nemlig $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$) for $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 11\}$. Så må vi ta for oss $t \in \{0, 11\}$ spesielt.

$t = 0$: radoperasjoner på den augmenterte matrisen til systemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 33 \\ -2 & 0 & -2 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \quad 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -9 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \end{array}\right] \cdot -1/9 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \end{array}\right] -6 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her har vi ingen inkonsistens, og én fri variabel, så uendelig mange løsn. når $t = 0$.

$t = 11$: radop på aug. matr:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 11 & 3 & 33 \\ -2 & 0 & 9 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \quad 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 9 & -6 \end{array}\right] -3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{array}\right]$$

Har har vi en inkonsistens i siste rad $(0x + 0y + 0z = -33)$, så ingen løsn. når $t = 11$.

Oppg 2(a) Hvis $A^k = 0$ får vi $0 = \det(A^k) = (\det(A))^k$, så da må $\det(A) = 0$. Det betyr at A ikke er inverterbar.

(b) Motsatt: se f.eks. på $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da er A ikke inverterbar ($\det(A) = 0$), men $A^k = A \neq 0 \ \forall\, k \geq 1$. Så det motsatte gjelder ikke generelt.