Husk: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, totalmatrise $[A \,\vdots\, \mathbf{b}]$ $\rightsquigarrow$ redusert trappeform

7L

Teorem 15

Gitt et lin. likn. system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med n ukjente og m likninger.

(a) Anta at $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Da er systemet løsbart hvis og bare hvis $0 \cdots 0\ 1$ ikke opptrer i redusert trappeform av syst.

(b) Hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, så er $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid løsbart.

(c) Anta at systemet er løsbart. Da har vi

(i) ingen frie ukjente $\Leftrightarrow$ nøyaktig en løsn. $\Leftrightarrow$ red. trappeform er $\begin{bmatrix} I_n & \vdots & * \\ O & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

(ii) minst en fri ukjent $\Leftrightarrow$ ∞ mange løsninger

Bevis: (a) Hvis $0 \cdots 0\ 1$ opptrer i red. trappeform av systemet, så har vi sett at systemet ikke er løsbart, dvs. systemet løsbart $\Rightarrow$ $0 \cdots 0\ 1$ opptrer ikke i red. trappeform.

Hvis $0 \cdots 0\ 1$ ikke opptrer, får vi en løsning ved å velge alle frie ukjente lik 0, og alle ledende ukjente
$$x_i = b'_i = \text{konstantleddet på raden med ledende ukjente } x_i$$
dvs. systemet er løsbart.

(b) Hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, så er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en løsning.

(c)(i) Ingen frie ukjente, da er redusert trappeform

$\begin{bmatrix} I_n & \vdots & b' \\ O & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ nøyaktig én løsning $(x_i = b'_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$

$\Downarrow$

ingen frie ukjente i red. trappeform.

(ii) Minst en fri ukjent x_{i_0}: Da kan x_{i_0} velges fritt i $\mathbb{R}$, og vi får ∞ mange løsninger.

Hvis det fins ∞ mange løsninger, så må det finnes frie ukjente, ellers ville vi ha kun én løsning samtidig som vi har ∞ mange løsninger. ⨳. $\Rightarrow$ Vi har minst en fri ukjent. $\square$