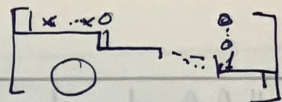


Husk: $AX = b$, totalmatrise $[A; b]$ \rightsquigarrow redusert trappesform



(33)

Teorem 15

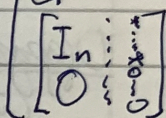
Gitt et lin. likn. system $AX = b$ med n ukjente og m likninger.

(a) Anta at $b \neq 0$. Da er systemet løsbart hvis og bare hvis $0 \dots 0 1$ ikke opptrer i redusert trappesform av syst.

(b) Hvis $b = 0$, så er $AX = 0$ alltid løsbart.

(c) Anta at systemet er løsbart. Da har vi

(i) ingen frie ukjente \Leftrightarrow nøyaktig en løsn. \Leftrightarrow } red. trappesform
(ii) minst en fri ukjent \Leftrightarrow ∞ mange løsninger } er



Benz: (a) Hvis $0 \dots 0 1$ opptrer i red. trappesform av systemet, så har vi sett at systemet ikke er løsbart, dvs. systemet løsbart $\Rightarrow 0 \dots 0 1$ opptrer ikke i red. trappesform.

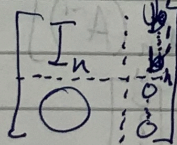
Hvis $0 \dots 0 1$ ikke opptrer, får vi en løsning ved å velge alle frie ukjente lik 0, og alle ledende ukjente

$$x_i = b_i = \text{konstantleddet på raden med ledende ukjente } x_i$$

dvs. systemet er løsbart.

(b) Hvis $b = 0$, så er $X = 0$ en løsning.

(c) (i) Ingen frie ukjente, da er redusert trappesform



\Rightarrow nøyaktig én løsning ($x_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$)

ingen frie ukjente i red. trappesform.

(ii) Minst en fri ukjent x_{i_0} : Da kan x_{i_0} velges fritt i \mathbb{R} , og vi får ∞ mange løsninger.

Hvis det fins ∞ mange løsninger, så må det finnes frie ukjente, ellers ville vi ha kun én løsning, samtidig som vi har ∞ mange løsninger. $\times \Rightarrow$ Vi har minst en fri ukjent.

