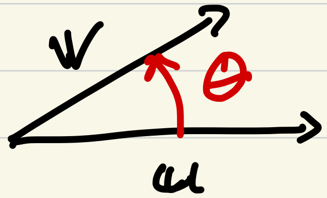
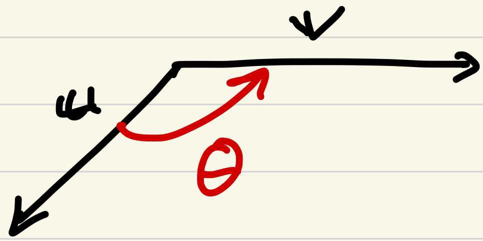
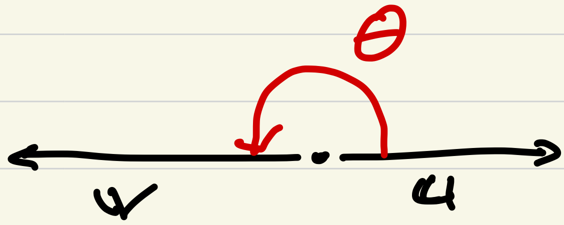
4 Skalarprodukt

Minner om: Gitt to ikke-null vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, vinkelen θ mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vinkelen θ mellom 0 og π slik at retningen av en av vektorene faller sammen med retningen av den andre med en dreining på θ mot klokka.







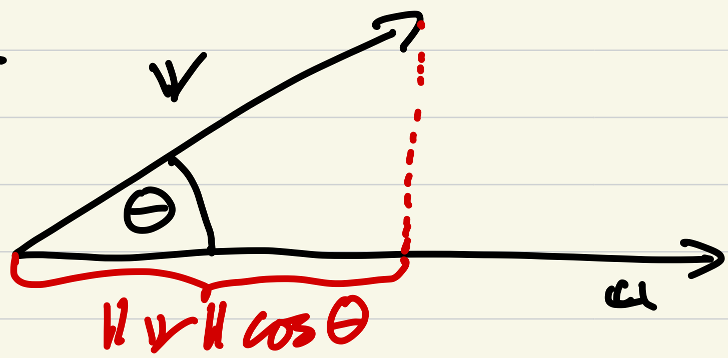
DEF: Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er to ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ og θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, da er skalarproduktet av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, betegnes med

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

definert som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{u}\| \underbrace{\|\mathbf{v}\| \cos\theta}$$

Geometrisk:



Hvis $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ er 0, så er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Merk: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

Har lært: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \quad \big(\mathbf{u}=(u_1,u_2), \mathbf{v}=(v_1,v_2)\big)$

Hvorfor?

Anta at vi har vist at:

$$(i)\quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

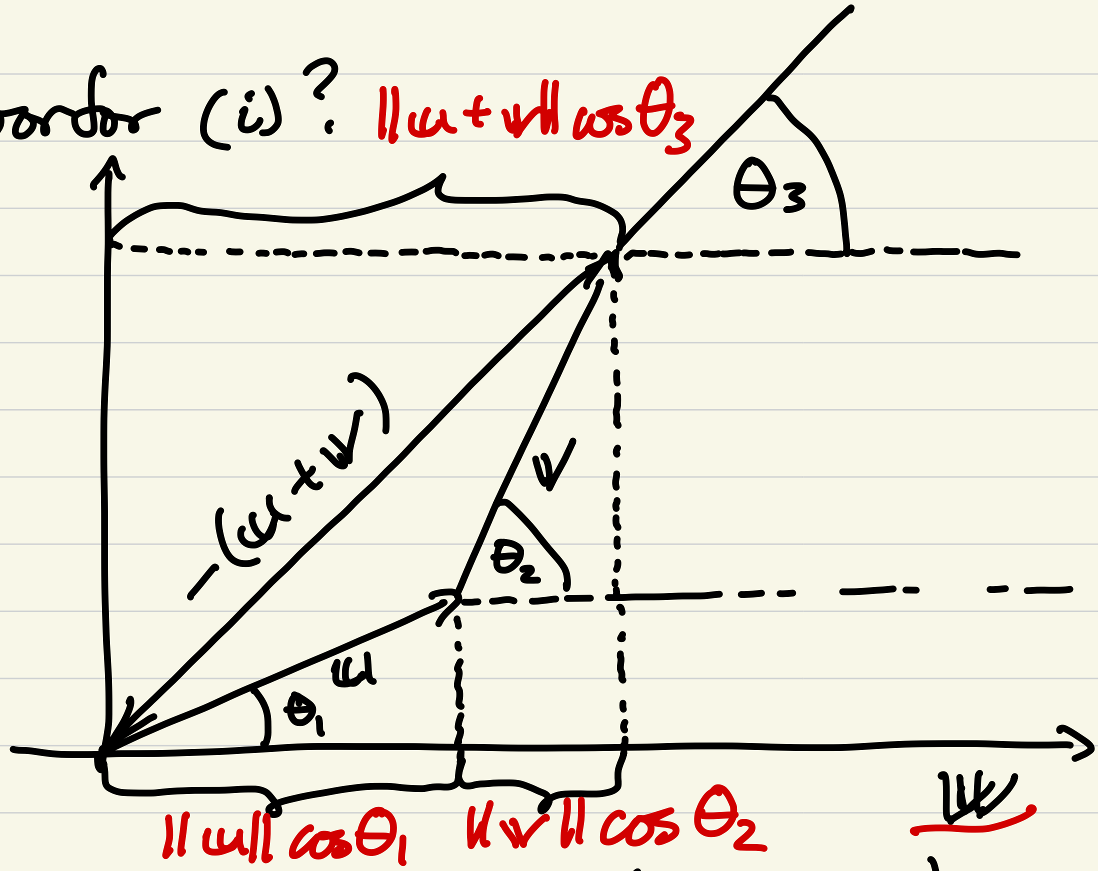
$$(ii)\quad (a\mathbf{u})\cdot\mathbf{w} = a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot(a\mathbf{w})$$

La $\mathbf{u}=(u_1,u_2)=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{v}=(v_1,v_2)=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{v} \\
&\overset{(i)}{=} (u_1\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{v} + (u_2\mathbf{e}_2)\mathbf{v} \\
&\overset{(ii)}{=} u_1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{v}) + u_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{v}) \\
&= u_1\big(\mathbf{e}_1\cdot(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2)\big) + u_2\big(\mathbf{e}_2\cdot(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2)\big) \\
&\overset{(i)\&(ii)}{=} u_1\big(v_1\underbrace{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)}_{1,\ \theta=0} + v_2\underbrace{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)}_{0,\ \theta=\frac{\pi}{2}}\big) + u_2\big(v_1\underbrace{(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)}_{0,\ \theta=\frac{\pi}{2}} + v_2\underbrace{(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2)}_{1,\ \theta=0}\big) \\
&= u_1v_1 + u_2v_2 \quad \checkmark.
\end{aligned}$$

Tilsvarende i $\mathbb{R}^3$.

Hvorfor (i)?



Vi har $\underbrace{\mathbf{u}+\mathbf{v}+(-(\mathbf{u}+\mathbf{v}))}_{\text{lukket vektorpolygon.}}=\mathbf{0}$

Faktum: Projeksjonen av et lukket vektor-polygon inn på en fast retning (vektor) er lik null.

Dette gir

$$\|\mathbf{u}\|\cos\theta_1+\|\mathbf{v}\|\cos\theta_2-\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\cos\theta_3=0 \quad \Big|\cdot\|\mathbf{w}\|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta_1}_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}+\underbrace{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta_2}_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}-\underbrace{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta_3}_{(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}}=0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}.$$

Oppgave: Vis (iii) $(a\mathbf{u})\cdot\mathbf{w} = a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot(a\mathbf{w})$

Motiverer definisjonen av <u>skalarproduktet</u> i $\mathbb{R}^n$

<u>DEF:</u> For $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$ så defineres <u>skalarproduktet</u>

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \overset{\text{det}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}_{\text{radvektor}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{\text{kolonnevektor}}$$

<u>Eksempel</u> $\mathbf{u} = (1, 0, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 4, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, -1, -1)$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot 3 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 4 + (-1)(-1) = 3 + 0 + 8 + 1 = 12$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) + (-1)(-1) = 1 + 0 - 2 + 1$$

$$= 0$$