<u>I eksempelet over:</u>

x_1, x_2, x_4 ledende ukjente

x_3, x_5 frie ukjente $\leftarrow$ gir ∞ mange løsn.

<u>Merk:</u> Hvis $0 \cdots 0\ 1$ opptrer, dvs.

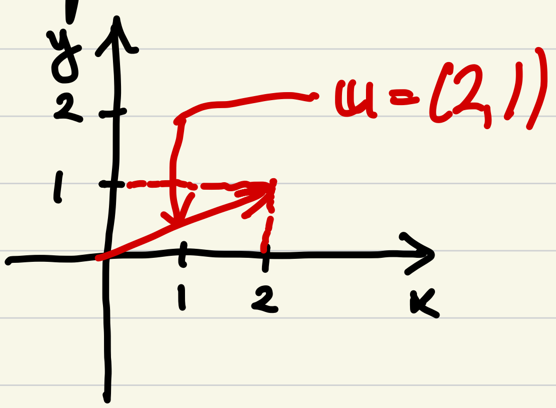
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1,$$

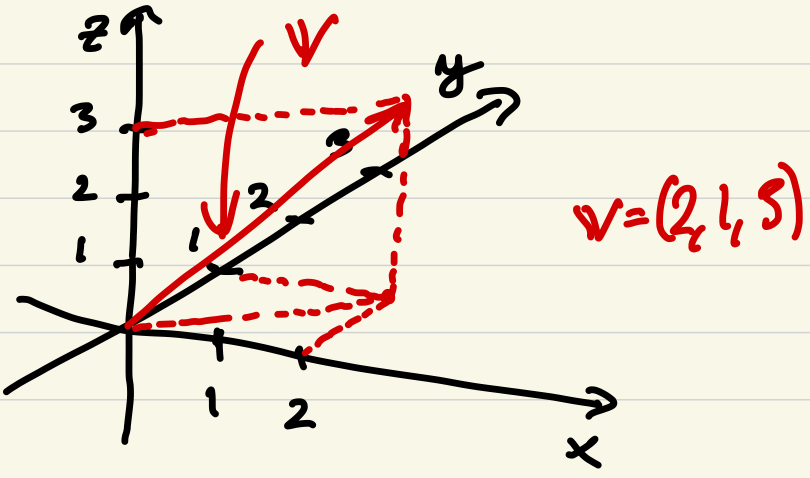
så er systemet <u>ikke løsbart.</u>

Skal definere matriser og matriseoperasjoner ved hjelp av operasjoner på vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vil nå definere vektorer i $\mathbb{R}^n$.

3 Vektorer i $\mathbb{R}^n$

<u>Husk fra vgs:</u> Vektorer i planet $\mathbb{R}^2$ eller i rommet $\mathbb{R}^3$ identifiserte vi med punkter i planet eller i rommet:





Husk: Vektor = retning + lengde.

Merk: Vi tenker på vektorer som enten

radvektorer $u = [2 \quad 1]$, $v = [2 \quad 1 \quad 3]$

eller

kolonnevektorer $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

To grunnleggende operasjoner i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$:

1) sum av vektorer u og v, $u + v$.

2) multiplikasjon med en skalar $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot u$.

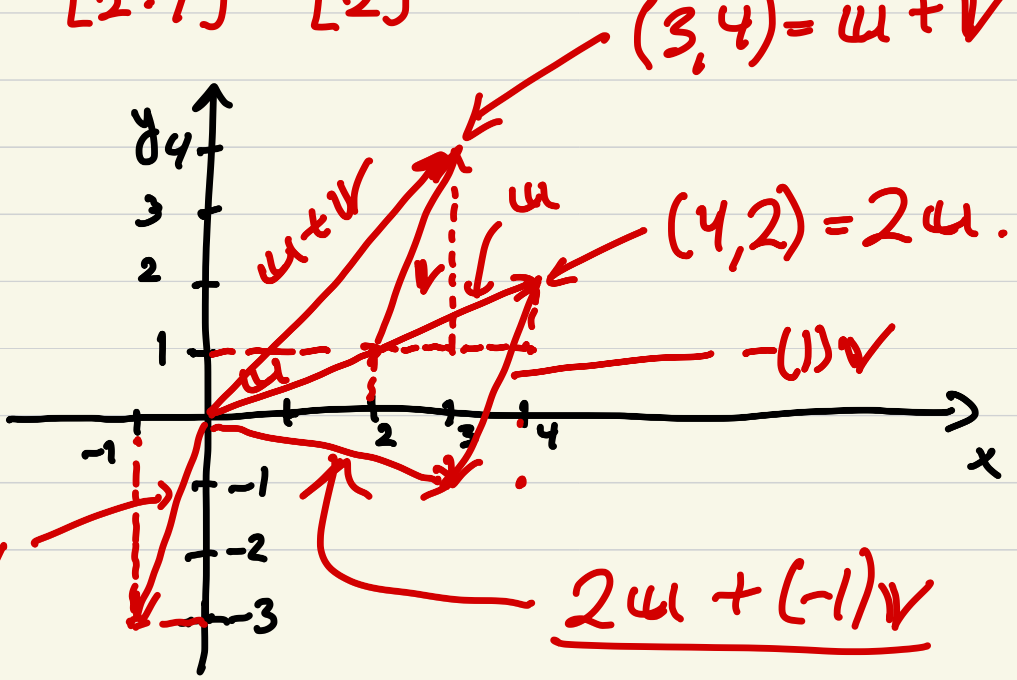
Eksempel $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1) $u + v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2) $2 \cdot u = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Kan tolkes geometrisk:

$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1)v$



Kombinasjon av 1) og 2)

$2\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ← en lineær kombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dette motiverer definisjon av $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$, heltall):

DEF: (i) Elementene i $\mathbb{R}^n$ er ordnede n-tuppel

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

av elementer i $\mathbb{R}$. Vi identifiserer elementene $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$, enten med radvektoren

$$[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$$

og/eller kolonnevektoren

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

La $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$.

(ii) Da er $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ like hvis

$$\begin{matrix} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ \vdots \\ u_n = v_n \end{matrix}$$

, dvs. $u_i = v_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$.

(iii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \overset{\text{def}}{=} (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$

(iv) $c\mathbf{u} \overset{\text{def}}{=} (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$

Merk: 1) La $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$ i $\mathbb{R}^n$, og $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som over. Da er

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{0} &= (u_1+0, u_2+0, \ldots, u_n+0) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbf{u} \\ &= (0+u_1, 0+u_2, \ldots, 0+u_n) = \mathbf{0}+\mathbf{u}.\end{aligned}$$

dvs. $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0}+\mathbf{u}$.

2) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$.

3) For $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$, så fins $\mathbf{u}'$ i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u}+\mathbf{u}' = \mathbf{0},$$

nemlig $\mathbf{u}' = (-1)\mathbf{u}$.

Bevis: La $\mathbf{u}' = (-1)\mathbf{u}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{u}' = \mathbf{u}+(-1)\mathbf{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + ((-1)u_1, (-1)u_2, \ldots, (-1)u_n) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) \\ &= (u_1-u_1, u_2-u_2, \ldots, u_n-u_n) \\ &= (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

$\square$

Proposisjon 1. La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være i $\mathbb{R}^n$, og la $c, d \in \mathbb{R}$. Da er

(a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ addisjon er assosiativ

(b) Det fins $\mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbb{0} = \mathbf{u} = \mathbb{0} + \mathbf{u}$$

for alle $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ (nemlig $\mathbb{0} = (0, 0, .., 0)$).

(c) Gitt $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, så fins $\mathbf{u}'$ i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbb{0} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}.$$

(nemlig $\mathbf{u}' = (-1)\mathbf{u}$).

gruppe

(d) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

((a)–(c) + (d) = abelsk gruppe)

(e) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.

(f) $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

(g) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$.

(h) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

$\mathbb{R}$-modul

<u>**Bevis:**</u> (a)

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \overset{\text{def}}{=} (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

$$\overset{\text{def}}{=} (\underbrace{(u_1+v_1)+w_1}_{\shortparallel}, \underbrace{(u_2+v_2)+w_2}_{\shortparallel}, \ldots, \underbrace{(u_n+v_n)+w_n}_{\shortparallel})$$

+ assosiativ for $\mathbb{R}$

$$= (u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2), \ldots, u_n+(v_n+w_n))$$

$$\overset{\text{def}}{=} (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n+w_n)$$

$$= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

(b)-(h): Oppgave $\square$