23V

Kjeglesnitt

Def: En kvadratisk form i $\mathbb{R}^n$ er et uttrykk (funksjon) på form

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 + \underbrace{a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots}_{\text{ledd på form } a_{ij}x_ix_j : \text{"kryssledd"}}$$

(dvs alle ledd har grad 2).

Merk: (1) En kv. form i $\mathbb{R}^2$ er på form (bruker x, y som variabler)

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Hvorfor skrive $2b$ og ikke b foran kryssleddet? La

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \underline{\text{symmetrisk matrise}}$$

Da er

$$(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

(2) En kv. form på $\mathbb{R}^3$:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = (x\ y\ z)\underbrace{\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisk}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(3) Generell kv. form på $\mathbb{R}^n$: $\bar{x}^T \underbrace{A}_{\text{symmetrisk}} \bar{x}$ hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

For oss: Vi skal konsentrere oss om $\mathbb{R}^2$ nå, men en del teknikker gjelder generelt.

Merk: La $(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ være en kv. form i $\mathbb{R}^2$, hvor da A er en symmetrisk 2×2-matrise som i (1) over:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Da sier Teorem 62 at A er ortogonalt diagonaliserbar:

$\exists$ diagonalmatrise D og en ort. matrise P (dvs $P^{-1} = P^T$) med

$$A = PDP^T \qquad \left(D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right)$$

La oss gjøre et <u>variabelskifte</u>:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} \quad \text{dvs:} \quad \boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= (x \; y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left[P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]^T A \left[P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \underbrace{P^T A P}_{D\,!!} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= (u \; v) D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= (u \; v) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 \end{aligned}$$

Så etter dette variabelskiftet kan vi uttrykke den (samme) kv. formen <u>uten</u> kryssledd v.h.a. de nye variablene.

Eksempel: $13x^2 - 8\sqrt{3}xy + 21y^2 = (x \; y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hvor

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$$

Ort. diag. av A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 13 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & \lambda - 21 \end{vmatrix} = (\lambda - 13)(\lambda - 21) - 16 \cdot 3$$

$$= \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25)$$

Egenverdier: $\lambda_1 = 9$ og $\lambda_2 = 25$

Må finne ortonormale basiser for egenrommene, dvs nullrommene til $\lambda I - A$.

$\underline{\lambda_1 = 9}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix}}_{9I-A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \sim \left(\begin{matrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Fri var: $x_2 = s \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}s \Rightarrow N(9I-A) = \{ s\begin{pmatrix}\sqrt{3} \\ 1\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$

Basis: $\{\begin{pmatrix}\sqrt{3} \\ 1\end{pmatrix}\}$

Normerer og får (ortonormal) basis (kun én vektor, så trenger ikke GS)

$\{\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 \\ 1/2\end{pmatrix}\}$

$\underline{\lambda_2 = 25}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}}_{25I-A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Fri var: $x_2 = s \Rightarrow x_1 = -1/\sqrt{3}\, s \Rightarrow N(25I-A) = \{ s\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} \\ 1\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$

Basis: $\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} \\ 1\end{pmatrix}\}$

Normerer og får (ortonormal) basis

$\{\begin{pmatrix}-1/2 \\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\}$

Gir $P = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ og $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Merk: her er } \det(P) = 1}$

Nå tar vi variabelbyttet:

$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}$, dvs $\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} = P^T\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\, x + 1/2\, y \\ -1/2\, x + \sqrt{3}/2\, y\end{pmatrix}$

Da er

$$13x^2 - 8\sqrt{3}xy + 21y^2 = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 9u^2 + 25v^2$$

Merk: Kan alltid anta at $\det(P) = 1$: hvis $\det(P) = -1$ bytter vi bare om på kolonnene i P og D.

Kan vise: Når P er en ortogonal 2×2-matrise med $\det(P)=1$ så er P på form

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Så variabelbyttet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

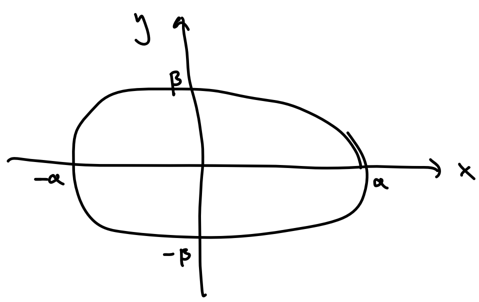
betyr at vi roterer xy-planet med vinkelen θ mot klokken for å få uv-planet. Fra eksempelet:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix}$$

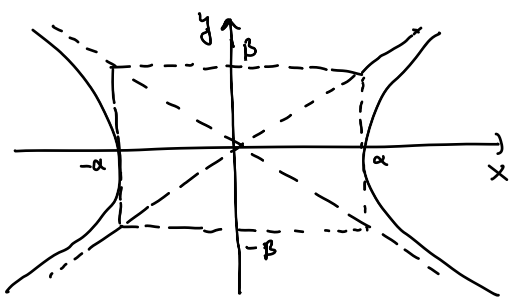
Så her har vi rotert xy-planet $\pi/6$ mot klokken for å få uv-planet.

Kjeglesnitt: Ellipser (inkl. sirkler), hyperbler, parabler, ... (Fig. s. 420)

Vi skal nå spesielt se på ellipser og hyperbler:



$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Problem: Gitt en kv.form $(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$, og et tall $k \in \mathbb{R}$, hvilket kj.snitt (om noe) representerer

$$(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$$

Løsningsalgoritme:

(1) Foreta ort. diag. av (den symmetriske) matrisen A:

$$A = PDP^T \quad \text{hvor} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ egenv})$$

og P ortogonal med $\det(P) = 1$

(2) Variabelbytte:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Vi vet at

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

så uv-planet fås ved å rotere xy-planet med vinkelen θ mot klokken.

(3) Etter variabelbyttet er

$$(x\ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (u\ v)\, D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

så i uv-planet er ligningen

$$\boxed{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = k}$$

Skriver om til

$$\boxed{\frac{u^2}{k/\lambda_1} + \frac{v^2}{k/\lambda_2} = 1}$$

Identifiser så det eventuelle kj.-snittet i uv-planet.

Eksempel: (1)

$$13x^2 - 8\sqrt{3}xy + 21y^2 = 49, \quad \text{dvs} \quad (x\ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 49 \quad \text{hvor}$$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$$

Ort. diag av A fra forrige eks:

$$A = PDP^T$$

hvor

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix}$$

Så med variabelbyttet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

fikk vi

$$(x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (u\ v) D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 9u^2 + 25v^2$$

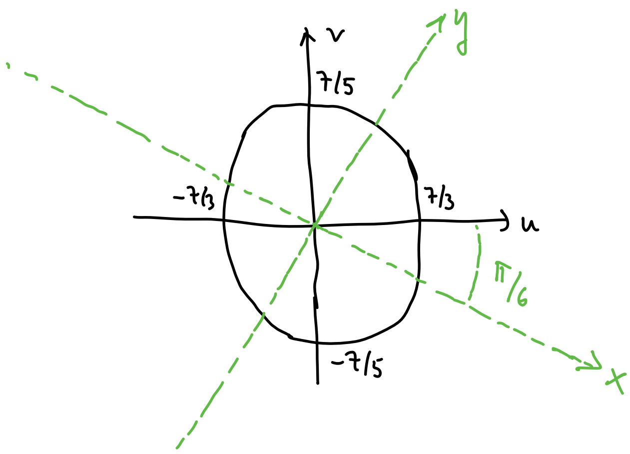
Ny ligning blir da

$$9u^2 + 25v^2 = 49$$

$$\Longrightarrow \frac{u^2}{49/9} + \frac{v^2}{49/25} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{u^2}{(7/3)^2} + \frac{v^2}{(7/5)^2} = 1$$

Ellipse i uv-planet med halvakser $7/3$ og $7/5$:



(2) $13x^2 - 8\sqrt{3}xy + 21y^2 = -6$ gir ved samme prosedyre som i (1) at

$$9u^2 + 25v^2 = -6$$

etter variabelbyttet. Men $9u^2 + 25v^2 \geq 0$ for alle $u, v \in \mathbb{R}$, så dette er ikke en ligning med noen graf.