20V

Ortogonale basiser

Fra før: For $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ og $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$ definerer vi <u>skalarproduktet</u> som

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \quad (\in \mathbb{R})$$

Eksempel: $\bar{u} = (2, -1, 3)$, $\bar{v} = (0, 4, 2) \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 2$

<u>Proposisjon 4</u> (fra Gruppearb 4F)

(1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

(2) $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

kombiner og få også $(\bar{v} + \bar{w}) \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{w} \cdot \bar{u}$

(3) $k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (k\bar{v})$ for $k \in \mathbb{R}$

(4) $\bar{u} \cdot \bar{u} \geq 0$ og $\bar{u} \cdot \bar{u} = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Def: $\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$ (gir mening fordi $\bar{u} \cdot \bar{u} \geq 0$). Kalles <u>norm</u>.

Merk: (1) Hvis $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ eller $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ er $\|\bar{u}\|$ den virkelige lengden til $\bar{u}$.

(2) Cauchy-Schwarz (Teorem 5):

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$$

Konsekvens: hvis $\bar{u} \neq \bar{0}$ og $\bar{v} \neq \bar{0}$ er

$$-1 \leq \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \leq 1$$

(3) <u>Vinkelen</u> mellom $\bar{u} \neq \bar{0}$ og $\bar{v} \neq \bar{0}$ er definert som

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}\right), \quad \theta \in [0, \pi]$$

Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ eller $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ så er dette den virkelige vinkelen

(4) For $\bar{u} \neq \bar{0}$ og $\bar{v} \neq \bar{0}$ er $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Leftrightarrow$ vinkelen er $\pi/2$

Def: $\bar{u}$ og $\bar{v}$ kalles <u>ortogonale</u> dersom $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

Eksempler: (1) $(2, 1)$ og $(1, -2)$ i $\mathbb{R}^2$

(2) $(0, 3, -3, 1)$ og $(\pi, 2, 3, 3)$ i $\mathbb{R}^4$

Teorem 56

La $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t\}$ være en ortogonal mengde (dvs $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0$ for $i \neq j$) ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er vektorene lineært uavhengige.

Bevis: Bruker karakteriseringen av lin. uavh. fra Prop 49. Anta

$$k_1\bar{v}_1 + \dots + k_t\bar{v}_t = \bar{0} \qquad (k_i \in \mathbb{R})$$

Da er

$$0 = \bar{0}\cdot\bar{v}_1 = (k_1\bar{v}_1 + \dots + k_t\bar{v}_t)\cdot\bar{v}_1 \overset{\text{Prop 4}}{=} k_1(\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1) + \dots + k_t(\bar{v}_t\cdot\bar{v}_1)$$
$$= k_1(\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1)$$

siden $\bar{v}_2\cdot\bar{v}_1 = \dots = \bar{v}_t\cdot\bar{v}_1 = 0$. Siden $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ er $\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1 \neq 0$, så da må $k_1 = 0$. Tilsv er $k_2 = \dots = k_t = 0$ ved å se på $\bar{0}\cdot\bar{v}_2, \dots, \bar{0}\cdot\bar{v}_t$. $\square$

Korollar 57

La $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ være en ortogonal mengde ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

Bevis: $\mathcal{B}$ er lin. uavh fra T56, og derfor en basis fra T50. $\square$

Def: En mengde $\mathcal{B}$ som i korollaret kalles en <u>ortogonal basis</u>. Hvis $\|\bar{v}_i\| = 1 \ \forall i$, kalles $\mathcal{B}$ en <u>ortonormal basis</u>.

Eksempel: Se på $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ hvor

$$\bar{v}_1 = (1,1,0)$$
$$\bar{v}_2 = (3,-3,2)$$
$$\bar{v}_3 = (-1,1,3)$$

Da er $\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2 = \bar{v}_1\cdot\bar{v}_3 = \bar{v}_2\cdot\bar{v}_3 = 0$, så $\mathcal{B}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$. Har

$$\|\bar{v}_1\| = \sqrt{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1} = \sqrt{2}$$
$$\|\bar{v}_2\| = \sqrt{\bar{v}_2\cdot\bar{v}_2} = \sqrt{22}$$
$$\|\bar{v}_3\| = \sqrt{\bar{v}_3\cdot\bar{v}_3} = \sqrt{11}$$

La nå $\bar{u}_1 = \frac{1}{\|\bar{v}_1\|}\bar{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

$\bar{u}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2\|}\bar{v}_2 = (3/\sqrt{22}, -3/\sqrt{22}, 2/\sqrt{22})$

$\bar{u}_3 = \frac{1}{\|\bar{v}_3\|}\bar{v}_3 = (-1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$

Da er $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Teorem 58

Anta $B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^n$. Da er

$$\bar{v} = \left(\frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_1\|^2}\right)\bar{v}_1 + \cdots + \left(\frac{\bar{v}_n \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_n\|^2}\right)\bar{v}_n$$

for alle $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Spesielt, hvis B er ortonormal så er

$$\bar{v} = (\bar{v}_1 \cdot \bar{v})\bar{v}_1 + \cdots + (\bar{v}_n \cdot \bar{v})\bar{v}_n$$

for alle $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: Oppgave.

Eksempel: Ta $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ som i forrige eksempel. For $\bar{v} = (9, -3, 5)$ har vi

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v} = (1,1,0) \cdot (9,-3,5) = 6$$

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v} = (3,-3,2) \cdot (9,-3,5) = 46$$

$$\bar{v}_3 \cdot \bar{v} = (-1,1,3) \cdot (9,-3,5) = 3$$

Det gir da

$$\bar{v} = \left(\frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_1\|^2}\right)\bar{v}_1 + \left(\frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_2\|^2}\right)\bar{v}_2 + \left(\frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}_3\|^2}\right)\bar{v}_3$$

$$= \frac{6}{2}\bar{v}_1 + \frac{46}{22}\bar{v}_2 + \frac{3}{11}\bar{v}_3$$

$$= 3\bar{v}_1 + \frac{23}{11}\bar{v}_2 + \frac{3}{11}\bar{v}_3$$

(Sjekk at det stemmer!)