18V

Egenverdier og egenvektorer

La A være en $n \times n$-matrise (må være kvadratisk her).

Def: En <u>egenverdi</u> for A er et tall $\lambda \in \mathbb{R}$ med egenskapen at $\exists$ en ikke-null vektor $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ med

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v}$$

En slik vektor $\bar{v}$ kalles da en <u>egenvektor</u> for A, tilhørende egenverdien λ.

Merk: (1) Egenvektorer er altså kolonnevektorer i $\mathbb{R}^n$

(2) Kan ha $\lambda = 0$, men egenvektorer må være ikke-null.

Eksempler: (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad : \quad A\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \bar{v} = 1 \cdot \bar{v}$$

Så $\lambda = 1$ er en egenverdi for A, og $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for denne egenverdien.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\bar{v}$$

Så $\lambda = -2$ er en egenverdi for A, og $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en tilhørende egenvektor.

Teorem 53

(1) λ egenverdi $\iff \det(\lambda I - A) = 0$.

(2) Hvis λ egenverdi:

$\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ egenvektor (tilhørende λ) $\iff \bar{v} \neq \bar{0}$ og $\bar{v} \in N(\lambda I - A)$
(dvs $(\lambda I - A)\bar{v} = \bar{0}$)

Bevis: (1) λ egenverdi $\iff \exists\ \bar{0} \neq \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ med $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

$\iff$ — " ——— $\lambda\bar{v} - A\bar{v} = \bar{0}$

$\iff$ — " ——— $(\lambda I - A)\bar{v} = \bar{0}$

$\iff \exists\ \bar{0} \neq \bar{v} \in N(\lambda I - A)$

$\iff \det(\lambda I - A) = 0$

(2) Se bevis for (1) $\square$

Def: (1) $\det(\lambda I - A)$ kalles det <u>karakteristiske polynomet</u> til A. Dette er et polynom i λ av grad n. (Egenverdiene er røttene i dette polynomet.)

(2) Hvis λ er en egenverdi kalles $N(\lambda I - A)$ <u>egenrommet</u> til A tilhørende egenverdien λ. (Fra T.53 vet vi at egenvektorene tilhørende λ er nøyaktig de ikke-null vektorene i dette egenrommet.)

Eksempler: (1)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (fra forrige eks)

Kar. polynom:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$
$$= (\lambda-3)(\lambda-1)$$

Så A har to egenverdier: $\underline{\lambda = 3 \text{ og } \lambda = 1}$. Egenrommene:

$\underline{\lambda = 3}$:

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 \text{ fri}: x_2 = s \Rightarrow x_1 = s$$

$$\Rightarrow N(3I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis for dette egenrommet: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\underline{\lambda = 1}$:

$$1 \cdot I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 \text{ fri}: x_2 = s \Rightarrow x_1 = -s$$

$$\Rightarrow N(1I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis for dette egenrommet: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Merk: egenvektoren $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ fra forrige eksempel ligger i dette egenrommet.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ (fra forrige eks)

Kar. polynom:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\Big((\lambda+5)(\lambda-4)+18\Big) - 3\Big(-3(\lambda-4)-18\Big) - 3\Big(-18+6(\lambda+5)\Big)$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) + 9(\lambda+2) - 18(\lambda+2)$$

Trekker ut $\lambda+2$

$$= (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-1) + 9(\lambda+2) - 18(\lambda+2)$$
$$= (\lambda+2)\Big((\lambda-1)^2 + 9 - 18\Big)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+2)$$
$$= (\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

Så A har to egenverdier: $\underline{\lambda = 4 \text{ og } \lambda = -2}$. Egenrommene:

$\underline{\lambda = 4:}$

$$4I - A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 \text{ fri } : x_3 = s \Rightarrow x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}s$$

$$\Rightarrow N(4I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2\, s \\ 1/2\, s \\ s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis for dette egenrommet: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\underline{\lambda = -2:}$

$$(-2)I - A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2, x_3 \text{ frie } : x_2 = s, x_3 = t$$
$$\Rightarrow x_1 = s - t$$

$$\Rightarrow N((-2)I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis for dette egenrommet: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Merk: egenvektoren $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fra forrige eks ligger i dette egenrommet.