17 V

V v.rom med en basis $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$
$\Rightarrow$ enhver $\bar{v} \in V$ kan uttrykkes som en lin. komb.

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

på en unik måte.

Def: For $\mathcal{B}$ og $\bar{v}$ som over, definerer vi (kolonnevektoren)

$$[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Dette er koordinatvektoren til $\bar{v}$ m.h.p. $\mathcal{B}$.

Eksempler: (1) Standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ er $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, hvor $\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. For en vektor $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ er da

$$\bar{v} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow [\bar{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \bar{v}$$

(2) La oss renummerere standardbasisen for $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$$

hvor $\bar{v}_1 = \bar{e}_2$, $\bar{v}_2 = \bar{e}_1$, $\bar{v}_3 = \bar{e}_3$. For $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ er da

$$\bar{v} = b\bar{v}_1 + a\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$$

$$\Rightarrow [\bar{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}$$

Så nummereringen/ordenen til basisvektorene er viktig!

(3) I Oppg 2(b) på Gruppearb 16F så vi at følgende også er en basis for $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}'' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ hvor

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

For $\bar{v} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, hva er $[\bar{v}]_{B''}$?

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2\\x_1\end{bmatrix}$$

$\overset{\text{sjekk!}}{\Longrightarrow}$ $x_1 = c, \; x_2 = b-c, \; x_3 = a-b$

$\Longrightarrow [\bar{v}]_{B''} = \begin{bmatrix}c\\b-c\\a-b\end{bmatrix}$ (dvs. $\bar{v} = c\bar{v}_1 + (b-c)\bar{v}_2 + (a-b)\bar{v}_3$)

(for $\bar{v} = \begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}$ er da $[\bar{v}]_{B''} = \begin{bmatrix}3\\-3-3\\1-(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-6\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \bar{v} = 3\bar{v}_1 - 6\bar{v}_2 + 4\bar{v}_3$)

Spørsmål: La $B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ og $B' = \{\bar{v}_1', \ldots, \bar{v}_n'\}$ være to basiser for et v.rom V. Er det noen sammenheng mellom $[\bar{v}]_B$ og $[\bar{v}]_{B'}$ for alle $\bar{v} \in V$?

Def: Med notasjon som over, la P være $n \times n$-matrisen

$$P = \left[[\bar{v}_1]_{B'} \mid \cdots \mid [\bar{v}_n]_{B'} \right]$$

Dvs kolonnene består av koordinatvektorene for vektorene i B, mhp B'. Dette er <u>overgangsmatrisen fra B til B'</u>.
(Notasjonen $P_{B \to B'}$ brukes også.)

<u>Teorem 52</u>

La V, B, B' og $P = P_{B\to B'}$ være som over. Da er

$$[\bar{v}]_{B'} = P[\bar{v}]_B$$

for alle $\bar{v} \in V$.