14V

Basis

DEF: La V være et vektorrom, og la $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} \subseteq V$. Vektorene $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ kalles en Basis for V hvis

(i) $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ er lineært uavhengig,

og (ii) $\text{LinSpan}\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} = V$.

Spesialtilfelle: Hvis $V = \{0\}$, da må en basis være lik $\emptyset$ og pr. def sier vi at
$$\text{LinSpan}\{\emptyset\} = \{0\}.$$

Eksempel
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(A) = \text{LinSpan}\{(1,0,1), (2,3,5), (0,1,1)\}$$
$$\overset{\text{Har sett}}{=} \text{LinSpan}\{\underbrace{(1,0,1)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{u_2}\}$$

Ser

- $\{u_1, u_2\}$ utspenner $R(A)$.
- $a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) = (0,0,0) = 0$
$$\underset{(a_1, a_2, a_1+a_2)}{\parallel} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0.$$
$$\Downarrow$$
$$\{u_1, u_2\} \text{ lin. uavh.}$$
$$\Rightarrow \quad \text{—''—} \quad \text{basis for } R(A).$$

Spørsmål: Kan vi ha en basis for $R(A)$ som består av 3 vektorer v_1, v_2, v_3?

Påstår: $\{v_1, v_2, v_3\}$ kan ikke være lin. uavh.

Bevis: Vil vise at $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$
for x_1, x_2, x_3 ikke alle null.

Har
$$v_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2$$
$$v_2 = a_{21} u_1 + a_{22} u_2$$
$$v_3 = a_{31} u_1 + a_{32} u_2$$

Anta
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1(a_{11}u_1 + a_{12}u_2) + x_2(a_{21}u_1 + a_{22}u_2) + x_3(a_{31}u_1 + a_{32}u_2) = 0$$

$$\Rightarrow (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)u_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)u_2 = 0.$$

$\{u_1, u_2\}$ lin. uavh. $\Rightarrow$
$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\#\text{ ukjente}}} > \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\#\text{ likninger}}} \xRightarrow{\text{Kor 16}} \infty$ mange løsn.

$\Rightarrow$ Spesielt, en løsning forskjellig fra $(0,0,0)$!

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ lin. avh.

Generaliserer dette argumentet og vi får:

Teorem 44

La V være et vektorrom som har en endelig basis. Da har alle basiser for V det samme antall elementer.

DEF: Dimensjonen til et vektorrom V er antall vektorer i en basis for V.
Vi skriver: $\dim V$.

Lemma 45

La $u_1, u_2, \ldots, u_t$ være vektorer i et vektorrom V slik at

$$V = \text{Lin Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}.$$

Da er en delmengde av $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ en basis for V, spesielt er

$$\dim V \leq t.$$

Bevis: Hvis alle $u_i = 0$, da vil $V = \{0\}$. Da er $\emptyset$ en basis, og $\emptyset$ er en delmengde av $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$.

Kan dermed anta at minst en $u_{i_0} \neq 0$ for en i_0. Da er $\{u_{i_0}\}$ lin. uavhengig.
Husk: $c u_{i_0} = 0 \Rightarrow c = 0$ eller $u_{i_0} = 0$.

La $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_s}\}$ være lin. uavh. med s maksimal. Ved renummerering anta at $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_s = s$.
Påstår: $V = \text{Lin Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$.

Klart at $\text{Lin Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subseteq V$, siden $u_i \in V$ for $i = 1, 2, \ldots, s$ og V er et vektorrom.
For å vise

$$V \subseteq \text{Lin Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_s\} = W$$

er det nok å vise at

$$u_j \in W$$

for $j = s+1, s+2, \ldots, t$. Pr. antakelse vet vi at

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_s, u_j\}$$

er lin. avhengig for hver $j = s+1, s+2, \ldots, t$, dvs. $\exists\, a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}$ ikke alle null slik at

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_s u_s + a_{s+1} u_j = 0$$

Hvis $a_{s+1} = 0$, så er $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ lin. avh. (ikke alle $a_1, a_2, \ldots, a_s$ lik null). Det er en selvmotsigelse. Dermed er $a_{s+1} \neq 0$, og vi får

$$a_{s+1} u_j = -a_1 u_1 - a_2 u_2 - \cdots - a_s u_s$$

$$\Rightarrow \quad u_j = -\frac{a_1}{a_{s+1}} u_1 - \frac{a_2}{a_{s+1}} u_2 - \cdots - \frac{a_s}{a_{s+1}} u_s$$

$$\in \text{Lin Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_s\} = W.$$

$\Rightarrow V \subseteq W$

$\Rightarrow V = \text{Lin Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$

og $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ er en basis for V ▯