Vektorrom.

Har sett: For $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^n$ og $c, d \in \mathbb{R}$ har vi to binære operasjoner

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (c, \mathbf{u}) \longmapsto c\mathbf{u}$$

som tilfredsstiller

1) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
2) $\exists\, \mathbf{0} \in V$ slik at for alle $\mathbf{u} \in V$ så er
$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$$
3) For alle $\mathbf{u} \in V$, så $\exists\, \mathbf{u}' \in V$ slik at
$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}$$
<u>Skriver</u>: $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}$.
4) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
5) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
6) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
7) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
8) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

<u>DEF</u>: En mengde V med to binære operasjoner

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \quad (c, \mathbf{v}) \longmapsto c\mathbf{u}$$

som tilfredsstiller 1) – 8) kalles et <u>vektorrom over $\mathbb{R}$</u>.

<u>Proposisjon 39</u> V vektorrom over $\mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in V$, $c \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$
b) $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
c) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.
d) Hvis $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, så er $c = 0$ eller $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Bevis: d) Hvis $c=0$, så er det ingenting å vise.
Anta $c \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} c\cdot u = \mathbb{0} \Rightarrow c^{-1}(cu) = c^{-1}\cdot \mathbb{0} \overset{b)}{=} \mathbb{0} \\ \qquad\qquad\qquad \shortparallel \\ \qquad\qquad (c^{-1}c)u = 1\cdot u \overset{8)}{=} u \end{array}\right\} \Rightarrow u = \mathbb{0}.$$

a)–c) Oppgave. $\square$.

Eksempler

1) $V = \mathbb{R}^n$ ~ vektorrom over $\mathbb{R}$, $n \geq 1$.
2) $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ – alle $m\times n$-matriser over $\mathbb{R}$, $m,n \geq 1$.
3) La $u_1, u_2, \dots, u_t$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. La
V = alle lineær kombinasjoner av $\{u_1, \dots, u_t\}$.
$= \{a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_tu_t \mid a_i \in \mathbb{R}\}$
$= \text{LinSpan}\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$.
med vanlig addisjon og skalar multiplikasjon.
Da er V et vektorrom over $\mathbb{R}$.
Spesielt: $u_1 = \mathbb{0}$, $t=1$. $\text{LinSpan}\{\mathbb{0}\} = \{\mathbb{0}\}$.

4) $V = \mathbb{R}[x]$ = alle polynomer i en variabel x med koeffisienter fra $\mathbb{R}$.
V er et vektorrom under vanlig addisjon av polynomer og skalar multiplikasjon.

5) P_n = alle polynomer i en variabel x med koeffisienter fra $\mathbb{R}$ og grad $<n$.
$= \text{LinSpan}\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$.

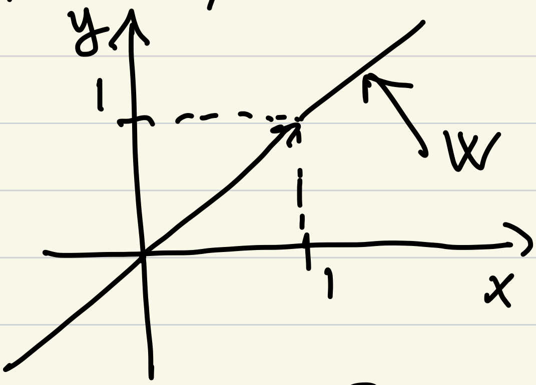
Merk: I 3) $V = \text{LinSpan}\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ og

5) $P_n \subseteq \mathbb{R}[x]$.

DEF: En delmengde W av et vektorrom V kalles et underrom av V hvis W er et vektorrom under addisjon og skalar-multiplikasjon gitt i V.

Eksempler

1) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \text{LinSpan}\{(1,1)\}$



2) $P_n \subseteq \mathbb{R}[x]$ underrom

3) $\text{LinSpan}\{0\} = \{0\} \subseteq V$ - vektorrom

nullunderrommet av V.