Teorem 28 For to $n\times n$-matriser A og B er
$$\det(A\cdot B)=\det(A)\det(B).$$

Bevis: To tilfeller ① A invertibel.
② A ikke invertibel.

① Teorem 17 $\Rightarrow$ A er et endelig produkt av elementær mat.
$$A=E_t\cdots E_1.$$

$$\Rightarrow \det(A\cdot B)=\det(E_t\cdots E_1\cdot B)$$
$$\overset{\text{Kor 25}}{=}\det(E_t)\cdots\det(E_1)\det(B)$$
$$\overset{\text{Kor 25}}{=}\det(A)\cdot\det(B)$$

② $\Rightarrow$ $\mathrm{Red}(A)$ har minst en nullrad (*)
Har: $\mathrm{Red}(A)=E_t\cdots E_1\cdot A$ for elementære matriser E_i.

$$\Rightarrow A=E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdots E_t^{-1}\,\mathrm{Red}(A)$$

elementære

$$\Rightarrow \det(A\cdot B)=\det(E_1^{-1}\cdots E_t^{-1}\cdot\mathrm{Red}(A)\cdot B)$$
$$\overset{\text{Kor 25}}{=}\det(E_1^{-1})\cdots\det(E_t^{-1})\det(\mathrm{Red}(A)\cdot B)$$

(*) $\Rightarrow$ $\mathrm{Red}(A)\cdot B$ har minst en nullrad
$\Rightarrow$ $\det(\mathrm{Red}(A)\cdot B)=0.$
$\Rightarrow$ $\det(A\cdot B)=0.$

A ikke invertibel $\Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow \det(A)\det(B)=0$

$\square$

Korollar 29 Hvis A er invertibel, så er
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis: $A \cdot A^{-1} = I_n \xrightarrow{\text{Teorem 28}} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$
$$\underset{\det(I_n) = 1}{\overset{\shortparallel}{}}$$
$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \qquad \square$$

Proposisjon 30
For en kvadratisk matrise A så er
$$\det(A^T) = \det(A).$$

Bevis: 1) Oppgave: E elementær matrise $\Rightarrow \det(E^T) = \det(E)$.

2) A vilkårlig $n \times n$-matrise.
Har sett: $\text{Red}(A) = E_t \cdots E_1 \cdot A$ for elem. matriser E_i.
$$\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}\, \text{Red}(A). \quad (*)$$

elementære.

nedre triangulær.
$$\Rightarrow A^T = \text{Red}(A)^T (E_t^{-1})^T \cdots (E_1^{-1})^T$$

$$\Rightarrow \det(A^T) = \det(\text{Red}(A)^T) \det((E_t^{-1})^T) \cdots \det((E_1^{-1})^T)$$
Prop. 26 ‖ ‖ fra 1) → ‖
$$= \det(\text{Red}(A)) \det(E_t^{-1}) \cdots \det(E_1^{-1})$$

$$= \det(A), \text{ fra } (*). \qquad \square$$

Merk: Proposisjon 30 gir at alt vi har vist for radoperasjoner også gjelder for kolonneoperasjoner.

Proposisjon 31 For en $n \times n$-matrise A så er alle tallene

$$DR_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{og} \quad DK_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

like $\det(A)$.

utvikling langs rad i

langs kolonne j.

Bevis: Kolonnene i A: $1\ 2\ 3 \cdots t-1\ t\ t+1 \cdots n$

Ombyttet kol. i A: $t\ 1\ 2 \cdots t-2\ t-1\ t+1 \cdots n$ $\Big\}$ $t-1$ ombyttinger

$$\det(A) = (-1)^{t-1} \det([c_t(A)\ c_1(A) \cdots c_{t-1}(A)\ c_{t+1}(A) \cdots c_n(A)])$$

$$= (-1)^{t-1} \sum_{i=1}^{n} a_{it} (-1)^{i+1} \det(M_{it})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{it} (-1)^{i+t} \det(M_{it}) = DK_t$$

Dette gir at alle DK_i er lik $\det(A)$. Siden $\det(A) = \det(A^T)$, så får vi det samme for DR_i. $\square$

Eksempler

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \det(A) = \det(E_{3+(-1)2} A) = \underbrace{\det(E_{3+(-1)2})}_{=1} \det(A)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) \overset{\cdot -1}{=} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -10 & 9 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\right) = 9 + 6 = \underline{\underline{15}}$$