# Eksamen H 2004

## Oppg 1(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 & -4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \cdot -1/7 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & -7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 & -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix} = \mathrm{Red}(A)$$

Ligningssystemet har $A$ som totalmatrise, så det har (unik) løsn $x = 1$, $y = 12/7$, $z = 1/7$.

(b) Systemet på matriseform blir $B\bar{x} = \bar{b}$ hvor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2-14 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1\cdot\left(-(a^2-14)-5\right) - 2\left(3(a^2-14)-20\right) - 3(3+4) \\ &= -a^2+9-6a^2+124-21 \\ &= 112-7a^2 \\ &= 7(16-a^2) \\ &= 7(4-a)(4+a) \end{aligned}$$

Så for $a \neq \pm 4$ er $\det(B) \neq 0$ og $B$ da inverterbar.
Da har $B\bar{x} = \bar{b}$ <u>unik</u> løsn $\bar{x} = B^{-1}\cdot\bar{b}$

For $a = \pm 4$ blir totalmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \\ 3 & -1 & 5 & \vdots & 2 \\ 4 & 1 & 2 & | & a+2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 & -4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \\ 0 & -7 & 14 & | & -10 \\ 0 & -7 & 14 & | & a-14 \end{pmatrix} -1 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \\ 0 & -7 & 14 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 0 & | & a-4 \end{pmatrix}$$

For $a=4$ er systemet løsbart, med en fri variabel, så uendelig mange løsn.

For $a=-4$ er det ingen løsn, ser det fra siste rad.

## Oppg 2

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = i(-2+5) - j(3-0) + k(-15-0)$$
$$= 3i - 3j - 15k$$
$$= (3, -3, -15)$$

$$\overline{P_1P_2} = (-2-1, 1-(-1), 1-2) = (-3, 2, -1) = \bar{u}$$
$$\overline{P_1P_3} = (1-1, 4-(-1), 1-2) = (0, 5, -1) = \bar{v}$$

Så arealet av trekanten er

$$\frac{1}{2} \| \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} \| = \frac{1}{2} \| \bar{u} \times \bar{v} \|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-15)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{9+9+225}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{243}$$
$$= 1/2\sqrt{3 \cdot 81}$$
$$= \frac{9}{2}\sqrt{3}$$