1. Fundamentet til matematikken

Grunnmuren til matematikken består av noen *aksiomer*, som f o rte, ved hjelp av *definisjoner* og *logiske argumenter*, til den matematiske verden vi kjenner i dag.

Våre viktigste verktøy er.

- et matematisk språk og notasjon
- definisjoner
- bevismetoder

Definisjoner. Definisjoner $\triangleq$ forklarer et matematisk begrep

Notasjon. Ofte brukt:

$$\begin{aligned}
\in \ldots &= \text{er element i}, \mathrm{s} \in \mathbb{Z} \\
\subseteq \ldots &= \text{er delmengde av}, \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \\
\forall \ldots &= \text{for alle} \\
\exists \ldots &= \text{det eksisterer/det finnes} \\
\Rightarrow \ldots &= \text{impliserer/medfører}
\end{aligned}$$

Eksempel: l et partall $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{Z}$ slik at $l = 2s$.

Utsagn. Et *utsagn* eller en *påstand* kan være *sann* eller *usann.*

Eksempler: $\begin{array}{l} \text{5 er et partall} \\ 5 \cdots 2 = 10 \end{array}$

(a) Vi trenger definisjoner og bevismetoder for å avgjøre om en påstand er sann:

- Definisjoner $\triangleq$ hva ordene betyr
- Bevismetoder $\triangleq$ ta en avgjørelse

(b) Hvis en påstand er sann, så kan den formuleres som

- et teorem
- en proposisjon
- et lemma
- et korolla

Bevismetoder.

Teorem 1. *Hvis k og l er partall, så er $k + l$ også et partall.*

Bevis. $\begin{array}{l} k \text{ partall} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z} \text{ slik at k} = 2\text{r} \\ l \text{ partall} \Rightarrow \exists s \in \mathbb{Z} \text{ slik at l} = 2\text{s} \end{array} \Rightarrow k+l = 2r+2s = 2(r+s)$

Siden $r + s \in \mathbb{Z} \Rightarrow k + l$ er et partall. $\square$

Teorem 2. *La $x \in \mathbb{Z}$. Hvis x^2 er et partall, så er x et partall også.*

Bevis. La $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\text{Anta at x er et oddetall} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ slik at x = 2k + 1} \\ &\Rightarrow x^2 = (2k+1)^2 \\ &\quad\;\; = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\quad\;\; = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ \text{Siden } \mathrm{2k^2 + 2k} \in \mathbb{Z} &\Rightarrow x^2 \text{er et oddetall.}\end{aligned}$$

□

Strategien i beviset over: Må vise at

$$A \Rightarrow B.$$

Ifølge logikken er det det samme som å vise at

$$\neg B \Rightarrow \neg A,$$

hvor $\neg B \stackrel{\wedge}{=}$ det motsatte av B.

For eksempel:

$$\begin{aligned} B &: a \text{ og b er heltall} \\ \neg B &: a \text{ eller b er ikke et heltall.} \\ &\quad \text{Dvs. maksimalt en av de to kan være et heltall}\end{aligned}$$

Teorem 3. *$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.*

Bevis.

$$\begin{aligned}\text{Anta at } \sqrt{2} \text{ er et rasjonalt tall} &\Rightarrow \begin{array}{l}\exists k, m \in \mathbb{N} \text{ slik at } \sqrt{2} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}, \\ \text{der største felles faktor av k og m er 1}\end{array} \\ &\Rightarrow \sqrt{2}m = k, \\ &\Rightarrow 2m^2 = k^2, \\ \text{Teorem 2} &\Rightarrow k \text{ er et partall} \\ &\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} \text{ slik at } \mathrm{k = 2l \text{ og } 2m^2 = 4l^2}, \\ \text{Teorem 2} &\Rightarrow m \text{ er et partall}\end{aligned}$$

Siden 2 er en faktor av m og k, så er ikke største felles faktor av m og k lik 1. Dette er en selvmotsigelse. Så $\sqrt{2}$ kan ikke være et rasjonalt tall, dvs. $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall. □

Strategien i beviset over: Må vise at påstanden er sann.

Anta at påstanden er usann og utleder en motsigelse.

Ekvivalenser. En *ekvivalens* er på formen $A \iff B$.

Strategi:

- Vis at $A \Rightarrow B$.
- Vis at $B \Rightarrow A$.

Teorem 4. *La $l \in \mathbb{Z}$. Da er l et partall $\iff$ l^2 er et partall.*

Generelt

- Forsikre deg om at du kjenner alle ordene i begrepene.
- Skriv ned hva du antar.
- Skriv ned hva du skal vise.
- Vis påstanden (eller finn et moteksempel)