21F, Oppg 4

V underrom av $\mathbb{R}^n$, og $V^\perp = \{\bar{w} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{v}\cdot\bar{w} = 0 \;\; \forall\, \bar{v} \in V\}$

(a) Må vise:

(1) $V^\perp \neq \phi$

(2) $V^\perp$ lukket under add: $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in V^\perp \Rightarrow \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in V^\perp$

(3) $V^\perp$ lukket under skalarmult: $\bar{w} \in V^\perp, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\bar{w} \in V^\perp$

(1) Siden $\bar{v}\cdot\bar{0} = 0 \;\; \forall\, \bar{v} \in V$ er $\bar{0} \in V^\perp$, så $V^\perp \neq \phi$

(2) Anta $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in V^\perp$, dvs $\bar{v}\cdot\bar{w}_1 = 0 = \bar{v}\cdot\bar{w}_2 \;\; \forall\, \bar{v} \in V$. Da er

$$\bar{v}\cdot(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) = \bar{v}\cdot\bar{w}_1 + \bar{v}\cdot w_2 = 0$$

for alle $\bar{v} \in V$, så $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in V^\perp$.

(3) Anta $\bar{w} \in V^\perp$ og la $k \in \mathbb{R}$. Da er

$$\bar{v}\cdot(k\bar{w}) = k(\bar{v}\cdot\bar{w}) = 0$$

for alle $\bar{v} \in V$, siden $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$. Så $k\bar{w} \in V^\perp$.

(b) $\Longrightarrow$: Anta $\bar{w} \in V^\perp$. Da er $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0 \;\; \forall\, \bar{v} \in V$. Siden vektorene $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t$ ligger i V, er da $\bar{v}_1\cdot\bar{w} = \dots = \bar{v}_t\cdot\bar{w} = 0$.

$\Longleftarrow$: Anta $\bar{v}_1\cdot\bar{w} = \dots = \bar{v}_t\cdot\bar{w} = 0$, og ta en vilkårlig vektor $\bar{v} \in V$. Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t\}$ danner en basis for V finnes det skalarer $k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + \dots + k_t\bar{v}_t$$

Det gir

$$\begin{aligned}\bar{v}\cdot\bar{w} &= (k_1\bar{v}_1 + \dots + k_t\bar{v}_t)\cdot\bar{w} = k_1(\bar{v}_1\cdot\bar{w}) + \dots + k_t(\bar{v}_t\cdot\bar{w}) \\ &= k_1\cdot 0 + \dots + k_t\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Altså er $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0 \;\; \forall\, v \in V$, dvs $\bar{w} \in V^\perp$.

(c) Mengden $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s\}$ består av n vektorer (siden $t+s=n$). Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t\}$ er en (ortogonal) basis for V, må $\bar{v}_i \neq \bar{0}$ for $1 \leq i \leq t$. Tilsvarende, siden $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s\}$ er en (ortogonal) basis for $V^\perp$, må $\bar{w}_i \neq \bar{0}$ for $1 \leq i \leq s$.

Altså består mengden $\mathcal{B}$ av n ikke-null vektorer. Ta en av vektorene $\bar{v}_i$. Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t\}$ er ortogonal, er $\bar{v}_i$ ortogonal på de andre vektorene i denne mengden, dvs $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0$ for $i \neq j$. Videre, siden hver $\bar{w}_j \in V^\perp$, og $\bar{v}_i \in V$, er $\bar{v}_i \cdot \bar{w}_j = 0$. Altså er $\bar{v}_i$ ortogonal på alle de $n-1$ andre vektorene i $\mathcal{B}$. Tilsvarende er enhver $\bar{w}_j$ ortogonal på alle de $n-1$ andre vektorene i $\mathcal{B}$. Det betyr at $\mathcal{B}$ er ortogonal, og Korollar 57 sier da at det er en basis for $\mathbb{R}^n$.

(d) La $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$. Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, kan $\bar{u}$ uttrykkes som en lin. komb.

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_t\bar{v}_t + b_1\bar{w}_1 + \dots + b_s\bar{w}_s$$

La $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_t\bar{v}_t$ og $\bar{w} = b_1\bar{w}_1 + \dots + b_s\bar{w}_s$. Da er $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$, og $\bar{v} \in V$, $\bar{w} \in V^\perp$ siden alle $\bar{v}_i \in V$, og alle $\bar{w}_j \in V^\perp$. Så vi kan uttrykke $\bar{u}$ på minst én måte som $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$, hvor $\bar{v} \in V$ og $\bar{w} \in V^\perp$.

Er denne dekomponeringen unik? Anta vi kan uttrykke $\bar{u}$ på to måter:

$$\bar{v} + \bar{w} = \bar{u} = \bar{v}' + \bar{w}'$$

hvor $\bar{v}, \bar{v}' \in V$ og $\bar{w}, \bar{w}' \in V^\perp$. Da får vi

$$\bar{v} - \bar{v}' = \bar{w}' - \bar{w}$$

Men $\bar{v} - \bar{v}' \in V$, og $\bar{w}' - \bar{w} \in V^\perp$, så likheten gir da at $\bar{v} - \bar{v}' \in V \cap V^\perp$ og $\bar{w}' - \bar{w} \in V \cap V^\perp$. Siden $V \cap V^\perp = \{\bar{0}\}$ må da $\bar{v} = \bar{v}'$ og $\bar{w} = \bar{w}'$, så det er kun én måte å dekomponere $\bar{u}$ på som en sum $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$ hvor $v \in V$ og $\bar{w} \in V^\perp$.