GRUPPEARBEID 9F

DETERMINANTER

Oppgave 1. Finn determinanten av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2. Finn determinanten av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3. Finn determinanten av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposisjon 22. *La A være en kvadratisk matrise.*

(a) *La B være matrisen en får fra A ved å multiplisere t-te rad i A med c. Da er*

$$\det(B) = c\det(A).$$

(b) *La B være matrisen A hvor to rader har byttet plass. Da er*

$$\det(B) = -\det(A).$$

Spesielt, hvis to rader i A er like, så er

$$\det(A) = 0.$$

(c) *La B være matrisen A hvor $c\mathrm{r}_j(A)$ er lagt til rad i i A. Da er*

$$\det(B) = \det(A).$$

Oppgave 4. Hvis en kvadratisk matrise A har en nullrad, så er $\det(A) = 0$.

Oppgave 5: Utfordring: Bevis Proposisjon 22 (b).
Hint:

- Bruk induksjon. Først 2×2-matriser, så $n \times n$-matriser med $n > 2$. Anta vist for $(n-1) \times (n-1)$-matriser.
- Viser det først for når rad 1 og t bytter plass.

- La $B = \begin{bmatrix} \mathbb{r}_t(A) \\ \mathbb{r}_2(A) \\ \vdots \\ \mathbb{r}_{t-1}(A) \\ \mathbb{r}_1(A) \\ \mathbb{r}_{t+1} \\ \vdots \\ \mathbb{r}_n(A) \end{bmatrix}$.
- Vis at for $i \neq 1, t$, så er $M_{i1}(B) =$ "$M_{i1}(A)$ med rad 1 og t bytte om og $\det(M_{i1}(B)) = -\det(M_{i1}(A))$.
- For $i = 1$, vis at $b_{11} = a_{t1}$ og

$$M_{11}(B) = \begin{array}{l}\text{“}M_{t1}(A) \text{ med radene } 1, 2, \ldots, t-1, t+1, \ldots, n \text{ ordnet} \\ \text{som } 2, 3, \ldots, t-1, 1, t+1, \ldots, n.\text{”}\end{array}$$

  Fra $M_{t1}(A)$ til $M_{11}(B)$ har det blitt gjort $t-2$ ombyttinger av rader.
- For $i = t$, vis at $b_{t1} = a_{11}$ og

$$M_{t1}(B) = \begin{array}{l}\text{“}M_{11}(A) \text{ med radene } 2, 3, \ldots, t-1, t, t+1, \ldots, n \text{ ordenet} \\ \text{som } t, 2, 3, \ldots, t-1, , t+1, \ldots, n.\text{”}\end{array}$$

  Fra $M_{11}(A)$ til $M_{t1}(B)$ har det blitt gjort $t-2$ ombyttinger av rader.
- Vilkårlig om bytting av rader kan skrives som

$$(t \longleftrightarrow t') = (1 \longleftrightarrow t)(1 \longleftrightarrow t')(1 \longleftrightarrow t).$$

Oppgave 6: Utfordring: Bevis Proposisjon 22 (c).
Hint: Bruk Lemma 21.

Korollar 23. *For de elementære matrisene E_{ci}, $E_{(i,j)}$ og E_{i+cj}, så er*
(a) $\det(E_{ci}) = c$.
(b) $\det(E_{(i,j)}) = -1$.
(c) $\det(E_{i+cj}) = 1$.

Oppgave 7: Utfordring: Bevis Korollar 23.
Hint: Bruk at
- $\det(I_n) = 1$.
- Elementære matriser er konstruert fra I_n ved hjelp av elementære radoperasjoner.
- Anvend Proposisjon 22.

Elementære matriser og determinanter

Bruk radoperasjoner for å beregne determinantene i de følgende oppgavene.

Oppgave 1. Finn determinanten av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2. Finn determinanten av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3. Finn determinanten av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposisjon 26. *Hvis $A = [a_{ij}]$ er en øvre eller nedre triangulær $n \times n$-matrise, så er*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Oppgave 4: Utfordring: Bevis Proposisjon 26.