Gruppearbeid 8F

Diagonale og triangulære matriser

Oppgave 1. Beregn all positive potenser av $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2. Finn $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ for alle $n \geq 1$.

Proposisjon 18. *La A være en invertibel matrise og n et ikke-negativt tall. Da er:*

(a) *A^n er invertibel, og $(A^n)^{-1} = A^{-n}(\overset{\text{def}}{=} (A^{-1})^n$.*
(b) *cA er invertibel for alle ikke-null skalarer c i $\mathbb{R}$, og $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.*

Oppgave 3: Utfordring: Bevis Proposisjon 18.

Oppgave 4: Utfordring: La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. La P være en invertibel 2×2-matrise.

(a) Hva er $(P^{-1}AP)^{100}$ uttrykt ved hjelp av A og P?
(b) La $P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 & -1 - \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hva er $P^{-1}AP$? Finn A^{100}.

Fun fact: Utfordring: Fibonacci tallene er definert ved at

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_{n+1} &= f_{n-1} + f_n, \text{ for } n \geq 1. \end{aligned}$$

La $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at $A^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$.

Symmetriske matriser

Oppgave 1. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Vis at A er invertibel, og finn A^{-1}.
(b) Hva er $(A^T)(A^{-1})^T$ og $(A^{-1})^T A^T$?
(c) Hva er forholdet mellom $(A^{-1})^T$ og $(A^T)^{-1}$?

Korollar 20. *La A være en invertibel matrise.*

(a) *A^T er invertibel.*
(b)

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Oppgave 2. Bevis Korollar 20. Hint: Hva er $(A \cdot A^{-1})^T$?

Oppgave 3. La A være en $n \times n$-matrise.

(a) Vis at I_n er en symmetrisk matrise.
(b) Vis at $A + A^T$ er en symmetrisk matrise.
(c) Vis at $A \cdot A^T$ er en symmetrisk matrise.
(d) Hvis A er invertibel, så er AA^T og $A^T A$ invertible symmetriske matriser.