Gruppearbeid 7F

Elementære matriser

Oppgave 1. Løs det følgende lineære likningssystemet ved å finne redusert trappeform til den tilhørende totalmatrisen:

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z &= 3 \\ 3x + 6y - 3z &= 0 \\ 4y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

Oppgave 2. Hvilke elementære matriser kan du multiplisere likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \mathbb{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

fra Oppgave 1 for å løse det?

Oppgave 3. Bevis Proposisjon 13 (i) og (ii).

Korollar 14. *La A være en $m \times n$-matrise og betrakt det lineære likningssystemet*

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

for en $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^m$. La

$$[R|\mathbb{b}']$$

være redusert trappeform av $[A|\mathbb{b}]$. Da har de lineære likningssystemene

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \quad \text{og} \quad R\mathbb{x} = \mathbb{b}'$$

samme løsningsmengde.

Oppgave 4: Utfordring: Bevis Korollar 14.

- Merk: Vi finner redusert trappeform ved å multiplisere fra venstre med elementære matriser. Av Proposisjon 10 så er produktet E av alle disse en invertibel matrise, og vi har
$$EA = R$$
og
$$E\mathbb{b} = \mathbb{b}'.$$
Dvs. vi sammenlikner $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ og $EA\mathbb{x} = E\mathbb{b}$.
- La
$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{b}\}$$
og
$$\mathcal{L}' = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid EA\mathbb{x} = E\mathbb{b}\}.$$
- Vis at hvis $\mathbb{x} \in \mathcal{L}$, så er $\mathbb{x} \in \mathcal{L}'$.

- Vis at hvis $\mathbb{x} \in \mathcal{L}'$, så er $\mathbb{x} \in \mathcal{L}$.
- Konkluder at $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

Elementære matriser og likningssystem

Oppgave 1. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Løs systemet $A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Kall en løsning $\mathbb{c}_1$.

(b) Løs systemet $A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Kall en løsning $\mathbb{c}_2$.

(c) Løs systemet $A\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kall en løsning $\mathbb{c}_3$.

(d) Hvilken egenskap har matrisen $B = [\mathbb{c}_1\mathbb{c}_2\mathbb{c}_3]$, dvs. matrisen med kolonner $\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \mathbb{c}_3$?

(e) Kan vi ha flere enn en løsning i (a), (b) eller (c)'?

Oppgave 2. Hvis A er invertible, vis at $(A^{-1})^{-1} = A$.

La A være en invertibel $n \times n$-matrise med invers A^{-1}. Da er

$$\begin{aligned} I_n &= A \cdot A^{-1}, \\ &= A \cdot [\mathbb{c}_1(A^{-1})\mathbb{c}_2(A^{-1}) \dots \mathbb{c}_n(A^{-1})], \\ &= [\underbrace{A \cdot \mathbb{c}_1(A^{-1})}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \underbrace{A \cdot \mathbb{c}_2(A^{-1})}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \dots \underbrace{A \cdot \mathbb{c}_n(A^{-1})}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}], \end{aligned}$$

Dvs. for å finne A^{-1} må vi finne vektorer $\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \dots, \mathbb{c}_n$ slik at

$$A\mathbb{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A\mathbb{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, A\mathbb{c}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette kan vi gjøre samtidig ved å betrakte totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ved Gauss-Jordan eliminasjon multipliserer vi denne fra venstre med en sekvens av elementære matriser $E_1, E_2, \ldots, E_t$ for å lage "redusert trappeform" $[I_n|B]$.

$$\begin{aligned} & E_1 \cdot [A|I_n] \\ & E_2 \cdot [E_1 \cdot A|E_1] \\ & \quad \vdots \\ & E_t \cdot [E_{t-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A|E_{t-1} \cdots E_2 \cdot E_1] \end{aligned}$$

som gir

$$[\underbrace{E_t \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A}_{I_n} \,|\, \underbrace{E_t \cdots E_2 \cdot E_1}_{B}]$$

where $B = [\mathbb{c}_1 \mathbb{c}_2 \cdots \mathbb{c}_n]$, dvs. $\mathbb{c}_i(B) = \mathbb{c}_i$. Dette gir at $[BA|B] = [I_n|B]$. Siden $A \cdot \mathbb{c}_i = \mathbb{e}_i$, så er $AB = I_n$. Vi har allerede at $BA = I_n$, slik at $B = A^{-1}$.

Teorem 17. *La A være en $n \times n$-matrise.*

(a) *Følgende er ekvivalent*
  (i) *A er invertibel,*
  (ii) *det lineære likningssystemet $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har kun e'n løsning.*
  (iii) *redusert trappeform av* $\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$ *er* $\left[\begin{array}{c|c} I_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$.

(b) *A er invertibel hvis og bare hvis A er et endelig produkt av elementære matriser.*

Oppgave 3: Utfordring: Vis Teorem 17.

Hint: (a) (i) $\Rightarrow$ (ii): Bruk Oppgave 1 fra 6F andre time/del.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Teorem 15 (c) sier noe om redusert trappeform. Hva er redusert trappeform av et ikke-homogent system? Bruk så kommentarene over.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Som over ved hjelp av Teorem 15 (c).

(b) Hvis A er invertibel, så har vi fra kommentarene over at $A^{-1} = E_t \cdots E_2 \cdot E_1$ for elementære matriser E_i. Oppgave 2 fra 6F andre del og Oppgave 2 over har vi at

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_t \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1}.$$

Den motsatte implikasjonen følger fra Proposisjon 10.