Gruppearbeid 6F

Invers av matriser I

Oppgave 1.

(a) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at B er en invers til A.

(b) Finn redusert trappeform av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Redusert trappeform av matrisen i (b) blir på formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}.$$

Hvilken matrise er $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$? Hvorfor ble det sånn?

Oppgave 2. La $A = \begin{bmatrix} e1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Har A en invers $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$?

Hint: Uttrykk $A \cdot B$ ved hjelp av kolonnene i A.

Oppgave 3: Utfordring: Vis at hvis en kvadratisk matrise A har en rad eller en kolonne som er null, så er A ikke-invertibel.

Invers av matriser II

Oppgave 1. La A være en invertibel $n \times n$-matrise. Betrakt det lineære likningssystemet

$$(*) \qquad A\mathbb{x} = \mathbb{b},$$

hvor $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

(a) Vis at $\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$ er en løsning av $(*)$, dvs. $(*)$ er alltid løsbar.

(b) Finnes det andre løsninger av $(*)$ enn $\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$?

Oppgave 2. Vis følgende resultat

Proposisjon 10. Hvis A og B er invertible matriser av samme størrelse, da er $A \cdot B$ invertibel og

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Hint: Bruk definisjonen.

Oppgave 3.

(a) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og la $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Beregn $A \cdot B$.

(b) Gitt to matriser A og B slik at $A \cdot B$ er invertibel, trenger/må A og B være invertible?