Gruppearbeid 2F

Før vi begynner, definerer vi følgende begrep:

DEF. La S være et lineært likningssystem i n ukjente $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Mengden av n-tupler $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ som løser likningssystemet S kalles *løsningsmengden til det lineære likningssystemet S.*

Oppgave 1. Løs det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{aligned} x \qquad + \ z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ y + \ z &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 2. Løs det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{aligned} x \qquad + \ z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= -1 \\ y + \ z &= -1 \end{aligned}$$

Oppgave 3.

(a) La S_1 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{lcccl} L_1\colon & x & & +z & = 1 \\ L_2\colon & 2x & +3y & +5z & = 4 \end{array}$$

La S_2 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{lcccl} L_2\colon & 2x & +3y & +5z & = 4 \\ L_1\colon & x & & +z & = 1 \end{array}$$

Vis at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1 hvis og bare hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2.

(b) La

$$L\colon 2x + 3y + 5z = 4,$$

en lineær likning. Vis at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i L hvis og bare hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i

$$\frac{1}{2}L\colon x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z = 2.$$

(c) La S_1 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{lcccl} L_1\colon & x & & +z & = 1 \\ L_2\colon & 2x & +3y & +5z & = 4 \end{array}$$

La S_2 være det lineære likningssystemet gitt ved:

$$\begin{array}{rcccl} L_1\colon & x & & +z & = 1 \\ (-2)L_1 + L_2\colon & & 3y & +3z & = 2 \end{array}$$

Vis at (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_1 hvis og bare hvis (s_1, s_2, s_3) er en løsning i S_2.

(d) Vis at de elementære radoperasjonene bevarer løsningsmengden av lineære likningssystemer.

Vektorer i $\mathbb{R}^n$

DEF. (i) *Elementene* i $\mathbb{R}^n$ er ordnede n-tuppel

$$\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

av elementer i $\mathbb{R}$. Vi identifiserer elementene $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$, enten med *radvektoren*

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

og/eller *kolonnevektoren*

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

La $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

(ii) Da er $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ *like*, vi skriver $\mathbb{u} = \mathbb{v}$, hvis

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 \\ &\vdots \\ u_n &= v_n \end{aligned}$$

dvs. $u_i = v_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) $\mathbb{u} + \mathbb{v} \overset{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.

(iv) $c\mathbb{u} \overset{\text{def}}{=} (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$.

Merk. (1) La $\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0)$ i $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ som over. Da er

$$\begin{aligned} \mathbb{u} + \mathbb{O} &= (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbb{u} \\ &= (0 + u_1, 0 + u_2, \ldots, 0 + u_n) \\ &= \mathbb{O} + \mathbb{u} \end{aligned}$$

dvs. $\mathbb{u} + \mathbb{O} = \mathbb{u} = \mathbb{O} + \mathbb{u}$.

(2) $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$.

(3) For $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^n$, så fins det $\mathbb{u}'$ i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbb{u} + \mathbb{u}' = \mathbb{O}.$$

Nemlig $\mathbb{u}' = (-1)\mathbb{u}$.

Proposisjon 1. *La* $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ *og* $\mathbb{w}$ *være i* $\mathbb{R}^n$, *og la* $a, b \in \mathbb{R}$. *Da er:*

(a) $(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w})$, *dvs.* (*addisjon er* assosiativ).

(b) *Det finnes en entydig* $\mathbb{O}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{O} = \mathbb{u} = \mathbb{O} + \mathbb{u}$$

for alle $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$, *nemlig* $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0)$.

(c) *Gitt* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$, *så finnes det* $\mathbb{u}'$ *i* $\mathbb{R}^n$ *slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{u}' = \mathbb{u}' + \mathbb{u} = \mathbb{O},$$

nemlig $\mathbb{u}' = (-1)\mathbb{u}$.

(d) $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$.

(e) $a(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = a\mathbb{u} + a\mathbb{v}$.

(f) $(a + b)\mathbb{u} = a\mathbb{u} + b\mathbb{u}$.

(g) $a(b\mathbb{u}) = (ab)\mathbb{u}$.

(h) $1\mathbb{u} = \mathbb{u}$.

Oppgave 4.

(a) Vis punkt (a) i Proposisjon 1.

(b) I Merk over har vi sett at det eksisterer et element med samme egenskap som $\mathbb{O}$. Vis at det kun eksisterer et slikt element.

(c) Vis at elementet $\mathbb{u}'$ i Proposisjon 1 (c) er unikt/entydig bestemt.

(d) Vis Proposisjon 1 (d)–(h).

(e) **Utfordring** Bevis (a) og (c) bare ved å bruke egenskapene i Proposisjon 1.