GRUPPEARBEID 21F

TIME 1: GRAM-SCHMIDT-PROSESSEN

Oppgave 1. De gitte mengdene er lineært uavhengige. Anvend Gram-Schmidt-prosessen på dem. Sjekk at mengdene man får ut er ortogonale.

(a)

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

(b)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Oppgave 2. Hvis vi starter med en lineært uavhengig mengde med to vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ i $\mathbb{R}^n$ (for $n \geq 2$), så gir G-S-prosessen oss en ortogonal mengde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\right)\mathbf{u}_1 \end{aligned}$$

Verifiser at mengden $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er ortogonal.

TIME 2: ORTOGONALE PROJEKSJONER

Oppgave 3. (a) La V være underrommet av $\mathbb{R}^3$ med ortogonal basis

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

på V.

(b) La W være underrommet av $\mathbb{R}^4$ med mengden fra Oppgave 1(b) som basis. Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

på W.

Oppgave 4. La oss bevise noen av påstandene fra forelensingen. La V være et underrom av $\mathbb{R}^n$, og betrakt undermengden

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ for alle } \mathbf{v} \in V \}$$

av $\mathbb{R}^n$.

(a) Vis at $V^\perp$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

(b) Anta at $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$ er en basis for V. Vis at

$$\mathbf{w} \in V^\perp \Longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = \cdots = \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{w} = 0$$

(c) Anta nå at basisen fra (b) er ortogonal (f.eks. etter å ha anvendt G-S-prosessen), og at $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$ er en ortogonal basis for $V^\perp$. Da så vi på forelesning at $t + s = n$. Vis at mengden

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$$

danner en basis for $\mathbb{R}^n$.

(d) Vis at enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kan uttrykkes unikt (altså på én og bare én måte) som en sum $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, hvor $\mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{w} \in V^\perp$.