GRUPPEARBEID 16F

TIME 1 OG 2: UNDERROM, BASIS OG DIMENSJON

Oppgave 1. La A være en $m \times n$-matrise.

(a) Vis at nullrommet $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

(b) Anta $\operatorname{rank}(A) = r$. Hva er da $\dim N(A)$?

Oppgave 2. I denne oppgaven tenker vi på vektorene i $\mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer.

(a) Vis at $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$. Dette er *standardbasisen* (og den enkleste basisen). Overbevis deg selv om at dette kan generaliseres til $\mathbb{R}^n$.

(b) Vis at $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

(c) Vis at $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$ er en lineært uavhengig mengde vektorer i $\mathbb{R}^4$. Er dette en basis for $\mathbb{R}^4$?

Oppgave 3. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 11 \\ -3 & 6 & 1 & -15 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & -1 & 19 \end{bmatrix}$$

(a) Finn en basis for $R(A)$ og $N(A)$.

(b) Finn en basis for $C(A)$ bestående av kolonnevektorer i A.

Oppgave 4. (a) La S være en endelig mengde vektorer i et endeligdimensjonalt vektorrom V, og sett $W = \operatorname{LinSpan} S$. Vis at $\dim W \le |S|$, hvor $|S|$ betegner antall elementer i S. (Hint: Teorem 50.)

(b) La A være en $m \times n$-matrise. Vis at $\operatorname{rank}(A) \le \min\{m, n\}$.