Gruppearbeid 13F

Matrisetransformasjoner og tre vektorrom

Oppgave 1. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

(a) Finn $R(A)$. Hvor mange vektorer trengs for å utspenne $R(A)$?
(b) Finn $C(A)$. Hvor mange vektorer trengs for å utspenne $C(A)$?
(c) Finn $N(A)$. Hvor mange vektorer trengs for å utspenne $N(A)$? Hva er summen av antall vektorer i (b) og (c)?

Oppgave 2. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

(a) La $\mathbb{x}_0$ og $\mathbb{x}_1$ være to løsninger i $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$. Hvor er vektoren $\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_0$? I $R(A)$, $C(A)$ eller $N(A)$?
(b) Anta at $\mathbb{x}_p$ er en løsning av $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$. Beskriv mengden av alle løsningene av $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ved hjelp av $\mathbb{x}_p$ og $N(A)$.

Teorem 42. *La A være en $m \times n$-matrise over $\mathbb{R}$ og $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$. Da har vi følgende:*

(a) *$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er løsbart hvis og bare hvis $\mathbb{b} \in C(A)$.*
(b) *La*

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{b}\}$$

og

$$\mathcal{L}_0 = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{0}\}.$$

Hvis $A\mathbb{x}_p = \mathbb{b}$, så er

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x}_p + \mathbb{x}_0 \mid \mathbb{x}_0 \in \mathcal{L}_0\}.$$

(c) *Anta at $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er løsbart. Da har vi følgende*
   (i) *$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ har nøyaktig en løsning hvis og bare hvis $N(A) = \{\mathbb{0}\}$.*
   (ii) *$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ har uendelig mange løsninger hvis og bare hvis $N(A) \neq \{\mathbb{0}\}$.*

Oppgave 3: Utfordring: Bevis Teorem 42.

Lineært uavhengighet

Oppgave 1. La $\mathbb{u}_1 = \mathbb{0}$, $\mathbb{u}_2 = (1, 1, -1)$ og $\mathbb{u}_3 = (3, -4, 3)$. Er $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}$ lineært uavhengig?

Oppgave 2. La $\mathbb{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbb{u}_2 = (1, 2, -1)$ og $\mathbb{u}_3 = (6, 2, -3)$. Er $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}$ lineært uavhengig?

Oppgave 3. La $\mathbb{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbb{u}_2 = (1, 2, -1)$, $\mathbb{u}_3 = (6, 2, -3)$ og $\mathbb{u}_4 = (3, -4, 3)$. Er $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3, \mathbb{u}_4\}$ lineært uavhengig?

Korollar 43. *La $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ være t vektorer i $\mathbb{R}^m$, og la $A = [\mathbb{u}_1 | \mathbb{u}_2 | \cdots | \mathbb{u}_t]$. Da er følgende ekvivalent:*

(a) *Mengden $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ er lineært uavhengig.*

(b) *$A\mathbb{x} = \mathbb{O}$ har nøyaktig en løsning, hvor $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix}$.*

(c) *Hvis*

$$a_1\mathbb{u}_1 + a_2\mathbb{u}_2 + \cdots + a_t\mathbb{u}_t = \mathbb{O},$$

så er $a_1 = a_2 = \cdots = a_t$.

Oppgave 4: Utfordring: Bevis Korollar 43.