Gruppearbeid 12F

Vektorrom

Oppgave 1. La $\mathbb{u}_1 = (4, -2, 1)$, $\mathbb{u}_2 = (-1, 0, 2)$ og $\mathbb{u}_3 = (-2, 3, 1)$ i $\mathbb{R}^3$. La

$$W = \text{LinSpan}\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\} = \{a_1\mathbb{u}_1 + a_2\mathbb{u}_2 + a_3\mathbb{u}_3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Vis at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

(b) Er

$$\text{LinSpan}\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\} = \text{LinSpan}\{\mathbb{u}_1 + 4\mathbb{u}_2, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\}?$$

(c) La $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Er

$$\{A\mathbb{x} \mid \mathbb{x} \in \mathbb{R}^3\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

(d) **Utfordring:** La A være som over. Er

$$\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbb{x} = \mathbb{O}\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$

Oppgave 2. La $V = \{\text{Alle kontinuerlige funksjoner } f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\}$. Det oppgies at vi har to binære operasjoner

$$- + -\colon V \times V \to V$$

og

$$- \cdot -\colon \mathbb{R} \times V \to V$$

gitt ved at

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

og

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

for $f, g \in V$ og $c \in \mathbb{R}$.

(a) Vis at V er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

(b) La

$$P_n(x) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Er $P_n(x) \subseteq V$?

UNDERROM

Oppgave 1. La $\mathbb{u}_1 = (4, -2, 1)$, $\mathbb{u}_2 = (-1, 0, 2)$ og $\mathbb{u}_3 = (-2, 3, 1)$ i $\mathbb{R}^3$. Vis at

$$\text{LinSpan}\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3\} = \{a_1\mathbb{u}_1 + a_2\mathbb{u}_2 + a_3\mathbb{u}_3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 2. Vis at $P_3(x)$ er et underrom av $\mathbb{R}[x]$.

Oppgave 3. La $V = \mathbb{R}^3$, og la

$$W = \{(u_1, u_2, 0) \mid u_i \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Vis at W er et underrom av V.
(b) La $\mathbb{u} = (4, 2, 1)$. Hvilken vektor $\mathbb{v}$ i W har minst avstand til $\mathbb{u}$?
(c) Projeksjonen av $\mathbb{u}$ ned på $\mathbb{e}_1$ er gitt ved

$$\frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{e}_1}{\|\mathbb{e}_1\|} \frac{\mathbb{e}_1}{\|\mathbb{e}_1\|} = (\mathbb{u} \cdot \mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1$$

og projeksjonen ned på $\mathbb{e}_2$ er gitt ved

$$\frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{e}_2}{\|\mathbb{e}_2\|} \frac{\mathbb{e}_2}{\|\mathbb{e}_2\|} = (\mathbb{u} \cdot \mathbb{e}_2)\mathbb{e}_2.$$

Hva er $(\mathbb{u} \cdot \mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1 + (\mathbb{u} \cdot \mathbb{e}_2)\mathbb{e}_2$?

Oppgave 4. La

$$V = \{\text{Alle kontinuerlige funksjoner } f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}\}.$$

Det oppgies at vi har to binære operasjoner

$$- + -\colon V \times V \to V$$

og

$$- \cdot -\colon \mathbb{R} \times V \to V$$

gitt ved at

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

og

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

for $f, g \in V$ og $c \in \mathbb{R}$.

(a) Vis at $P_3(x)$ er et underrom av V.
(b) La $\mathbb{u}_0 = 1$, $\mathbb{u}_1 = x$ og $\mathbb{u}_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Er $\text{LinSpan}\{\mathbb{u}_0, \mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\} = P_3(x)$?

(c) **Utfordring/undring:** Gitt $f(x)$ og $g(x)$ i V så definerer vi et skalarprodukt på V ved at

$$f(x) \cdot g(x) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Tilsvarende som for skalarproduktet i $\mathbb{R}^n$ så definerer vi lengden $\|f(x)\|$ til $f(x)$ i V til å være gitt ved

$$\|f(x)\|^2 = f(x) \cdot f(x).$$

Videre vil projeksjonen av $f(x)$ ned på $g(x)$ være gitt ved

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{\|g(x)\|} \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

Da er

$$\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{u}_j = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 2, i = 0, \\ \frac{2}{3}, i = 1, \\ \frac{2}{5}, i = 2. \end{cases}$$

Finn projeksjonen av e^x ned på $\mathbb{u}_i$ for $i = 0, 1, 2$. Vi har at

$$\int_{-1}^{1} \mathbb{u}_0 e^x dx = e - \frac{1}{e},$$

$$\int_{-1}^{1} \mathbb{u}_1 e^x dx = \frac{2}{e},$$

$$\int_{-1}^{1} \mathbb{u}_2 e^x dx = e - \frac{7}{e}.$$

Finn projeksjonen ned på $\mathbb{u}_0$, summen av projeksjonene ned på $\mathbb{u}_0$ og $\mathbb{u}_1$, og til slutt summen av projeksjonene ned på $\mathbb{u}_0$, $\mathbb{u}_1$ og $\mathbb{u}_2$, og sammenlign disse tre. **Hint:** Google "geogebra legendre & Chebyshev polynomial approximation".