Gruppearbeid 11F

Lengde

Oppgave 1. La $\mathbb{u} = (-1, 1, -2)$ og $\mathbb{v} = (2, 2, 1)$.

(a) Finn $\|\mathbb{u}\|$.
(b) Finn avstanden mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.
(c) Størrelsen $|\|\mathbb{v}\| \cos(\theta)|$ er lengden av projeksjonen av $\mathbb{v}$ på/langs $\mathbb{u}$, der θ er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$. Projeksjonen $\mathbb{v}_p$ av $\mathbb{v}$ langs er gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbb{v}_p = \|\mathbb{v}\| \cos(\theta) \cdot \frac{\mathbb{u}}{\|\mathbb{u}\|} &= \frac{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\| \cos(\theta)}{\|\mathbb{u}\|} \cdot \frac{\mathbb{u}}{\|\mathbb{u}\|} \\ &= \frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|} \cdot \frac{\mathbb{u}}{\|\mathbb{u}\|}\end{aligned}$$

Finn $\mathbb{v}_\perp = \mathbb{v} - \mathbb{v}_p$. Vis at $\mathbb{v}_p \cdot \mathbb{v}_\perp = \mathbb{0}$.
(d) Finn $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$.
(e) Finn arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

Oppgave 2. La F være planet gitt ved $2x + 3y + 5z = 3$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Hva er en normalvektor $\mathbb{n}$ for F?
(b) Vis at $P_0 = (0, 1, 0) \in F$. La $P_1 \in \mathbb{R}^3$. La $\mathbb{u} = P_1 - P_0$. Regn ut

$$\mathbb{t} = \frac{\mathbb{n} \cdot \mathbb{u}}{\|\mathbb{n}\|} \frac{\mathbb{n}}{\|\mathbb{n}\|}?$$

(c) Hva er $\|\mathbb{t}\|$?

Proposisjon 35. *La $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$ og $c \in \mathbb{R}$. Da er*

(a) $\mathbb{w} \times (\mathbb{u} + \mathbb{v}) = \mathbb{w} \times \mathbb{u} + \mathbb{w} \times \mathbb{v}$.
(b) $c(\mathbb{u} \times \mathbb{v} = (c\mathbb{u}) \times \mathbb{v} = \mathbb{u} \times (c\mathbb{c})$.

Oppgave 3: Utfordring. Bevis Proposisjon 35 (b).

Det skalare triple vektorproduktet

Oppgave 1. La $\mathbb{u} = (4, -2, 1)$, $\mathbb{v} = (-1, 0, 2)$ og $\mathbb{w} = (-2, 3, 1)$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Beregn $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{v} \times \mathbb{w})$.
(b) Beregn arealet av trekanten gitt av origo, $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.
(c) **Utfordring:** Beregn volumet av tetraederet gitt ved origo, $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$.

Korollar 38. (a) *To vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^2$ er parallelle hvis og bare hvis* $\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}) = 0$.

(b) *Tre vektorer* $\mathbb{u}$*,* $\mathbb{v}$ *og* $\mathbb{w}$ *i* $\mathbb{R}^3$ *ligger i samme plan hvis og bare hvis*

$$\det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Oppgave 2: Utfordring: Bevis Korollar 38.