Alle svar må begrunnes. Husk at du kan bruke resultater fra tidligere deloppgaver, selv om du ikke har klart å løse dem.

Oppgave 1

a) La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -t & 1 & 0 \\ 2 & 3 & t \end{pmatrix}$$

For hvilke verdier av t har matrisen A en invers?

b) Finnes det t slik at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + tz &= 1 \\ -tx + y &= 1 \\ 2x + 3y + tz &= 5 \end{aligned}$$

har uendelig mange løsninger? Hvis ja, finn verdiene for t og beskriv løsningsrommet for hver verdi av t.

Oppgave 2 La $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Finn egenverdiene og egenvektorer til A.

Hint: En egenverdi er 1.

b) Regn ut A^5.

Gi en tilnærmet verdi for A^{1000}?

Hint: Ikke regn uten å tenke først.

Oppgave 3

a) Forklar hvorfor $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ er ortogonalt diagonaliserbar. Finn en diagonalmatrise D og ortogonal P slik at $D = P^T AP$. Gi en geometrisk tolkning av lineæravbildningen T_P.
Husk: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Beskriver kvadratformen $5X^2 - 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2$ en parabel, en hyperbel eller en ellipse? Skisser kurven. (En skisse er godt nok, den trenger ikke å være nøyaktig.)

Oppgave 4 La $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Er $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en ortogonal mengde?

b) Finn en ortonormal mengde som spenner ut samme underrom.

Oppgave 5 La $g > 0$. Gitt a_{ij} og b_i, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2. \dots, n$, ønsker vi å finne $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n > 0$ slik at

$$\ell_1^{a_{i1}} \ell_2^{a_{i2}} \cdots \ell_n^{a_{in}} = g^{b_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Forklar når ligningene har unik løsning og forklar hvordan du kan finne den.

Hint: Logaritmer?

Oppgave 6 La $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være et ekte underrom med basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$, la $\mathbf{v} \notin U$ og la $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineæravbildning.

Vis at for enhver $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ så finnes det en lineæravbildning $g_{\mathbf{w}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ slik at $g_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ og for alle $\mathbf{u} \in U$ så er $g_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$.