KAPITTEL 1

Vektorer i $\mathbb{R}^n$

1. Vektorer

DEFINISJON 1.1. (i) *Elementene i* $\mathbb{R}^n$ er ordnede n-tuppel $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ av elementer i $\mathbb{R}$.

Vi identifiserer elementene $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$, enten med radvektoren $[u_1 u_2 \cdots u_n]$ og/eller kolonnevektoren $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

La $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$, og la c være $\mathbb{R}$.

(ii) Da er $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ *like* hvis

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n,$$

dvs. $u_i = v_i$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii)

$$\mathbb{u} + \mathbb{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$
$$c\mathbb{u} \stackrel{\text{def}}{=} (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n).$$

PROPOSISJON 1.2. *La* $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ *og* $\mathbb{w}$ *være i* $\mathbb{R}^n$*, og la* $c, d \in \mathbb{R}$*. Da er:*

(a) $(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w})$ *(addisjon er assosiativ).*

(b) *Det fins en entydig element* $\mathbb{0}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{0} = \mathbb{u} = \mathbb{0} + \mathbb{u}$$

for all $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *(nemlig* $\mathbb{0} = (0, 0, \ldots, 0)$*).*

(c) *Gitt* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$*, så fins det* $\mathbb{u}'$ *i* $\mathbb{R}^n$ *slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{u}' = \mathbb{0} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}$$

(nemlig $\mathbb{u}' = (-1)\mathbb{u}$*).*

(d) $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$.

(e) $a(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = a\mathbb{u} + a\mathbb{v}$.

(f) $(a + b)\mathbb{u} = a\mathbb{u} + b\mathbb{u}$.

(g) $a(b\mathbb{u}) = (ab)\mathbb{u}$.

(h) $1\mathbb{u} = \mathbb{u}$ *for all* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$.

KOROLLAR 1.3. *La* $\mathbb{u}$ *være i* $\mathbb{R}^n$ *og* a *i* $\mathbb{R}$*. Da er:*

(a) $0\mathbb{u} = \mathbb{0}$.

(b) $a\mathbb{0} = \mathbb{0}$.

(c) $(-1)\mathbb{u} = -\mathbb{u}$.

2. Lengde

DEFINISJON 2.1. *Lengden* (normen) $\|\mathbb{u}\|$ av en vektor $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\|\mathbb{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

PROPOSISJON 2.2. *For en vektor* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *og* $c \in \mathbb{R}$*, så er*

(a) $\|\mathbb{u}\| \geq 0$.
(b) $\|\mathbb{u}\| = 0$ *hvis og bare hvis* $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.
(c) $\|a\mathbb{u}\| = |a|\|\mathbb{u}\|$.

MERK. Spesielt i (c): For $\mathbb{u} \neq \mathbb{0}$, så er

$$\|\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\mathbb{u}\| = |\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}|\|\mathbb{u}\| = \frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\|\mathbb{u}\| = 1,$$

og $\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\mathbb{u}$ kalles *normaliseringen av* $\mathbb{u}$. En vektor med lengde 1 kalles en *enhetsvektor*.

3. Skalarprodukt

Husk: Hvis $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er to ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ og θ er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$, da er *skalarproduktet av* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$, betegnes med $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$, definert som

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\| \cos\theta.$$

Hvis $\mathbb{u}$ eller $\mathbb{v}$ er $\mathbb{0}$, så er $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$.

Har lært: $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ (i $\mathbb{R}^2$).

Spørsmål: Hvorfor?

Bruk at projeksjonen av et lukket vektorpolygon (en sum av vektorer som er nullvektoren) inn på en fast retning (vektor) er lik null.

DEFINISJON 3.1. For $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$ så defineres *skalarproduktet* $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$ av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ som

$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

PROPOSISJON 3.2. *For vektorer* $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ *og* $\mathbb{w}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *og* a *i* $\mathbb{R}$ *har vi:*

(a) $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = \mathbb{v} \cdot \mathbb{u}$.
(b) $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} + \mathbb{u} \cdot \mathbb{w}$.
(c) $a(\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}) = (a\mathbb{u}) \cdot \mathbb{v} = \mathbb{u} \cdot (a\mathbb{v})$.
(d) $\mathbb{u} \cdot \mathbb{u} \geq 0$, *og* $\mathbb{u} \cdot \mathbb{u} = 0$ *hvis og bare hvis* $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.
(e) $\mathbb{0} \cdot \mathbb{u} = 0 = \mathbb{u} \cdot \mathbb{0}$.

TEOREM 3.3 (Cauchy-Schwarz ulikhet). *For to vektorer* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$ *i* $\mathbb{R}^n$*, så er*

$$|\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}| \leq \|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|,$$

dvs.

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

DEFINISJON 3.4. *Vinkelen* θ *mellom to ikke-null vektorer* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$ defineres som

$$\theta = \cos(\frac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\|\mathbb{v}\|},$$

der $0 \leq \theta \leq \pi$.

DEFINISJON 3.5. To vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er *ortogonale* hvis $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0$.

PROPOSISJON 3.6. *For* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$ *i* $\mathbb{R}^n$*, så er*

$$\|\mathbb{u} + \mathbb{v}\| \leq \|\mathbb{u}\| + \|\mathbb{v}\|.$$

4. Lineære likningssystem

DEFINISJON 4.1. (i) En *lineær likning med n ukjente* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ er en likning som kan uttrykkes

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \tag{1}$$

der a_1, a_2, $\dots$, a_n er *koeffisienter* (konstanter) i $\mathbb{R}$ og ikke alle a_1, a_2, $\dots$, a_n er lik null. Hvis $b = 0$, så er likningen *homogen.*

(ii) Et endelig antall lineære likninger kalles et *system av lineære likninger*/et *lineært likningssystem.*

(iii) En *løsning av* (1) er et n-tuppel $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ slik at s_1 innsatt for x_1, s_2 innsatt for x_2, osv. gjør at (1) er tilfredsstilt.

Elementære radoperasjoner:

(I) Multipliserer en likning med en konstant $\neq 0$.
(II) To likninger bytter plass.
(III) Legger et multiplum av en likning til en annen.

Gauss-eliminasjon:

Steg 1: I første ikke-null kolonne fra venstre, ved eventuell ombytting av rader, fremskaff en ikke-null koeffisient på rad 1, multipliser med inversen til denne. (Dette gir en *ledende ener*/*pivot*).
Steg 2: Fjern koeffisienter $\neq 0$ under ledende ener.
Steg 3: Gjenta Steg 1–2 på radene 2 og nedover.
Steg 4: Gjenta Steg 3 på de nye undersystemene til systemet til systemet får en *trappeform*

$$\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & & & & & & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & & & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & 0 & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan-eliminasjon:

Steg 5: Fremskaff 0 over de ledende enerne, start fra bunnen.

DEFINISJON 4.2. En totalmatrise til et system av m lineære likninger med n ukjente er på *redusert trappeform* hvis den er av formen

$$\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & 0 & * & * & 0 & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & 0 & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Tallet 1 i siste rad kan være i siste kolonne. Ett-tallene svarer til *ledende ukjente.* En ukjent som ikke er ledende er *fri.*